ファジィ位相群についての一考察

和　泉　孔　二

Ⅰ　まえがき

位相構造と代数構造は，現代数学を支える大きな2本の柱である。その両面を兼ね備えた位相代数系，とりわけ位相群[1),2)]はリー群[3),4)]の基盤をなすだけでなく，数学の各方面や理論物理学などにおいても重要な概念となっている。

Zadeh[5)]によって提唱されたファジィ集合の概念は，Goguen[6)]によってL-ファジィ集合へと拡張され，数学的に定式化し得る概念となった。その後，ファジィ位相空間[7),8)]，ファジィ群[9),10)]，ファジィ位相群[11)]などの概念が提案された。

本稿では，ファジィ位相空間およびファジィ群についての概観を与え，L-ファジィ集合としてのファジィ位相群の諸性質を明確にすることを目的としている。ファジィ位相群の間の準同形や商ファジィ位相群の性質が，ファジィ集合による誘導ファジィ位相の観点から明らかになるであろう。

Ⅱ　ファジィ位相空間と部分空間

本論文で取り扱うファジィ集合とは，L-ファジィ集合[6)]のことであり，Lを完備分配束とするとき，集合X上のL-ファジィ集合Aとは，

$$\begin{array}{cccc} A: & X & \to & L \\ & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ & x & \mapsto & A(x) \end{array}$$

という関数のことである。ここで，命題Pの真理値を$[\![P]\!]\,(\in L)$と表せば，L-ファジィ集合Aを

$$[\![x \in A]\!] = A(x) \qquad (\forall x \in X)$$

として特徴づけることができる。

完備分配束Lの例としては，単位区間$I=[0,1]$，IとIの直積$I\times I$，あるいは，正規凸なファジィグレード（$\in I^I$）の全体[12)]などが考えられる。

以下，L-ファジィ集合のことを単にファジィ集合と呼ぶことにし，公理的集合論[13)]の観点から，集合X上のファジィ集合全体のクラスを$\mathsf{L}(X)$と表すことにする。

[定義 2.1]　定値ファジィ集合$k_c\,(\in \mathsf{L}(X))$を

$$k_c(x) = c\,(\in L) \qquad (\forall x \in X)$$

と定義する。ここで，

$$k_1 = X, \qquad k_0 = \phi$$

であり，1と0はそれぞれLにおける最大元と最小元とする。

[定義 2.2]　集合Xから集合Yへの写像

$$f: X \to Y$$

に対し，$B\,(\in \mathsf{L}(Y))$の逆像$f^{-1}[B]$を

$$f^{-1}[B](x) = B(f(x)) \qquad (\forall x \in X)$$

で定義し，$A\,(\in \mathsf{L}(X))$の像$f[A]$を

$$f[A](y) = \begin{cases} \bigvee_{z \in f^{-1}(y)} A(z) & (f^{-1}(y) \neq \phi) \\ 0 & (f^{-1}(y) = \phi) \end{cases} \qquad (\forall y \in Y)$$

で定義する。ただし，

$$f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}$$

とする。

ファジィ位相空間は以下のように定義される[7),8)]。

[定義 2.3]　集合 X 上のファジィ位相とは，次の条件を満たす X 上のファジィ集合の族 T のことである。

(i)　$\forall c \in L,\ k_c \in \mathrm{T}$

(ii)　$A,\ B \in \mathrm{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathrm{T}$

(iii)　$A_j \in \mathrm{T}\,(j \in J) \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathrm{T}$

このとき，(X, T) をファジィ位相空間と呼び，T の要素を開ファジィ集合と呼ぶ。

[定義 2.4]　$A \in \mathrm{L}(X)$，T を X 上のファジィ位相とするとき，A による誘導ファジィ位相 T_A とは

$$\mathrm{T}_A = \{U_j \cap A \mid U_j \in \mathrm{T}\,(j \in J)\}$$

のことであり，(A, T_A) を (X, T) のファジィ部分空間と呼ぶ。

[定義 2.5]　2つのファジィ位相空間 (X, T)，(Y, U) に対し，写像

$$f : (X, \mathrm{T}) \to (Y, \mathrm{U})$$

がファジィ連続であるとは，

$$\forall V \in \mathrm{U},\ f^{-1}[V] \in \mathrm{T}$$

を満たす場合をいう。また，写像

$$f : (X, \mathrm{T}) \to (Y, \mathrm{U})$$

がファジィ開であるとは，

$$\forall U \in \mathrm{T},\ f[U] \in \mathrm{U}$$

を満たす場合をいう。

[定義 2.5′]　(A, T_A), (B, U_B) をそれぞれ (X, T)，(Y, U) のファジィ部分空間とするとき，写像

$$f : (A, \mathrm{T}_A) \to (B, \mathrm{U}_B)$$

が相対ファジィ連続であるとは，

$$\forall V' \in \mathrm{U}_B,\ f^{-1}[V'] \cap A \in \mathrm{T}_A$$

を満たす場合をいう。また，写像

$$f : (A, \mathrm{T}_A) \to (B, \mathrm{U}_B)$$

が相対ファジィ開であるとは，

$$\forall U' \in \mathrm{T}_A,\ f[U'] \cap B \in \mathrm{U}_B$$

を満たす場合をいう。

[命題 2.1]　(A, T_A), (B, U_B) をそれぞれ (X, T)，(Y, U) のファジィ部分空間とし，写像

$$f : (X, \mathrm{T}) \to (Y, \mathrm{U})$$

がファジィ連続であるとする。このとき，

$$f[A] \subset B$$

であれば，写像

$$f : (A, \mathrm{T}_A) \to (B, \mathrm{U}_B)$$

は相対ファジィ連続である。

(証明)

$$V' \in \mathrm{U}_B \Rightarrow \exists V \in \mathrm{U} : V' = V \cap B$$

であり，

$$f^{-1}[V] \in \mathrm{T}$$

であることから

$$\begin{aligned} f^{-1}[V'] \cap A &= f^{-1}[V] \cap f^{-1}[B] \cap A \\ &= f^{-1}[V] \cap A \\ &\in \mathrm{T}_A \end{aligned}$$

(Q. E. D.)

[定義 2.6]　全単射

$$f : (X, \mathrm{T}) \to (Y, \mathrm{U})$$

がファジィ位相同形であるとは，f がファジィ連続であり，かつファジィ開である場合をいう。また，全単射

$$f : (A, \mathrm{T}_A) \to (B, \mathrm{U}_B)$$

が相対ファジィ位相同形であるとは，

$$f[A] = B$$

であって，さらに f が相対ファジィ連続であり，かつ相対ファジィ開である場合をいう。

ファジィ位相空間の写像の合成に対し，以下の命題が成立する。

[命題 2.2]　2つの写像

$$f : (X, \mathrm{T}) \to (Y, \mathrm{U})$$

および

$$g : (Y, \mathrm{U}) \to (Z, \mathrm{V})$$

がファジィ連続であるならば，それらの合成

$$g \circ f : (X, \mathrm{T}) \to (Z, \mathrm{V})$$

もまたファジィ連続である。

[命題 2.2′]　2つの写像

$$f : (A, \mathrm{T}_A) \to (B, \mathrm{U}_B)$$

および

$$g : (B, \mathrm{U}_B) \to (C, \mathrm{V}_C)$$

が相対ファジィ連続であるならば，それらの合成

$$g \circ f : (A, \mathrm{T}_A) \to (C, \mathrm{V}_C)$$

もまた相対ファジィ連続である。

(証明)

$$W' \in \mathrm{V}_C \Rightarrow g^{-1}[W'] \cap B \in \mathrm{U}_B$$

であることから

$$f^{-1}[g^{-1}[W']\cap B]\cap A\in\mathsf{T}_A$$

となり，命題 2.1 より

$$f[A]\subset B$$

であることと，

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

であることより

$$\begin{aligned}&(g\circ f)^{-1}[W']\cap A\\&=f^{-1}[g^{-1}[W']\cap B]\cap A\\&\in\mathsf{T}_A\end{aligned}$$

となるので，$g\circ f$ は相対ファジィ連続である。

（Q. E. D.）

［定義 2.7］　T が集合 X 上のファジィ位相であるとき，T の部分族 B が T の開基であるとは，T の各要素が B の要素の和集合で表される場合をいう。

［定義 2.7′］　T_A が X 上のファジィ集合 A による誘導ファジィ位相であるとき，T_A の部分族 B' が T_A の開基であるとは，T_A の各要素が B' の要素の和集合で表される場合をいう。したがって，B が集合 X 上のファジィ位相 T の開基であるとき，

$$\mathsf{B}_A=\{U\cap A\mid U\in\mathsf{B}\}$$

はファジィ集合 A による誘導ファジィ位相 T_A の開基である。

［命題 2.3］　2 つのファジィ位相空間 (X,T) と (Y,U) に対し，写像

$$f:(X,\mathsf{T})\to(Y,\mathsf{U})$$

が与えられ，B が U の開基であるとするとき，f がファジィ連続であるための必要十分条件は，

$$\forall B\in\mathsf{B},\ f^{-1}[B]\in\mathsf{T}$$

となることである。

［命題 2.3′］　(A,T_A)，(B,U_B) をそれぞれ (X,T)，(Y,U) のファジィ部分空間とし，B' を U_B の開基とするとき，写像

$$f:(A,\mathsf{T}_A)\to(B,\mathsf{U}_B)$$

が相対ファジィ連続であるための必要十分条件は，

$$\forall B'\in\mathsf{B}',\ f^{-1}[B']\cap A\in\mathsf{T}_A$$

となることである。

［定義 2.8］　集合 X 上の 2 つのファジィ位相 T_1，T_2 が集合族として

$$\mathsf{T}_1\supset\mathsf{T}_2$$

であるとき，T_1 は T_2 より精である，または，T_2 は T_1 より粗であるという。

［定義 2.9］　2 つの集合 X, Y に対し，写像　$f:X\to Y$　および Y 上のファジィ位相 U が与えられているとする。このとき，f がファジィ連続であるような X 上の最も粗なファジィ位相 T が存在する。これを U の f のもとでの逆像と呼ぶ。したがって，

$$V\in\mathsf{U}\Leftrightarrow f^{-1}[V]\in\mathsf{T}$$

が成立する。

［定義 2.10］　2 つの集合 X, Y に対し，写像　$f:X\to Y$　および X 上のファジィ位相 T が与えられているとする。このとき，f がファジィ連続であるような Y 上の最も精なファジィ位相 U が存在する。これを T の f のもとでの像と呼ぶ。

［定義 2.11］　与えられたファジィ位相空間の族 $\{(X_j,\mathsf{T}_j)\}(j\in J)$ に対し，それらの積 $\Pi_{j\in J}(X_j,\mathsf{T}_j)$ を以下のようなファジィ位相空間 (X,T) のことであると定義する。すなわち，

$$X=\Pi_{j\in J}X_j$$

は通常の積であり，T は射影

$$p_j:X\to X_j\ (j\in J)$$

がファジィ連続であるような X 上の最も粗なファジィ位相であるとする。このとき，T は X 上の積ファジィ位相と呼ばれ，(X,T) は積ファジィ位相空間と呼ばれる。

積ファジィ位相空間について，以下の命題が成立する。

［命題 2.4］　$\{(X_j,\mathsf{T}_j)\}(j\in J)$ をファジィ位相空間の族とし，(X,T) をそれらの積ファジィ位相空間とする。このとき，各 $U_j\in\mathsf{T}_j$ に対し，X 上の積ファジィ位相 T は，$p_j^{-1}[U_j]$ で表されるファジィ集合の有限個の共通部分から成る集合を開基としてもつ。

［命題 2.4′］　$\{(X_j,\mathsf{T}_j)\}(j=1,2,\cdots,n)$ をファジィ位相空間の有限族とし，(X,T) をそれらの積ファジィ位相空間とする。また，A_j を X_j

上のファジィ集合とし，A を X 上の積ファジィ集合とする。このとき，A による誘導ファジィ位相 T_A は，$\Pi_{j=1}^{n} U_j'$ という積ファジィ集合の集まりを開基としてもつ。ここで，

$$U_j' \in (\mathsf{T}_j)_{A_j} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

とする。

（証明）　T は開基

$$\mathsf{B} = \{\ \Pi_{j=1}^{n} U_j \mid U_j \in \mathsf{T}_j\ (j=1,2,\cdots,n)\}$$

をもつことから，T_A の開基は

$$\mathsf{B}_A = \{(\Pi_{j=1}^{n} U_j) \cap A \mid U_j \in \mathsf{T}_j\ (j=1,2,\cdots,n)\}$$

と表される。このとき，

$$(\ \Pi_{j=1}^{n} U_j) \cap A = \Pi_{j=1}^{n} (U_j \cap A)$$

であることから

$$U_j' = U_j \cap A$$

とすればよいことがわかる。

(Q. E. D.)

［命題 2.5］　2 つのファジィ位相空間の族

$$\{(X_j, \mathsf{T}_j)\},\ \{(Y_j, \mathsf{U}_j)\} \qquad (j \in J)$$

に対し，それらの積ファジィ位相空間をそれぞれ (X, T)，(Y, U) とし，写像

$$f_j : (X_j, \mathsf{T}_j) \to (Y_j, \mathsf{U}_j)$$

より構成される積写像

$$f = \Pi_{j=1}^{n} f_j : (X, \mathsf{T}) \to (Y, \mathsf{U})$$

を考える。このとき，f がファジィ連続であるためには，各 $j \in J$ に対し，f_j がファジィ連続であればよい。

［命題 2.5′］　ファジィ位相空間の有限族

$$\{(X_j, \mathsf{T}_j)\} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

に対し，それらの積ファジィ位相空間を (X, T) とし，$A_j \in \mathsf{L}(X_j)$，$A \in \mathsf{L}(X)$ とする。また，ファジィ位相空間 (Y, U) に対し，$B \in \mathsf{L}(Y)$ とし，写像

$$f : (B, \mathsf{U}_B) \to (A, \mathsf{T}_A)$$

を考える。このとき，f が相対ファジィ連続であるための必要十分条件は，各 j について $p_j \circ f$ が相対ファジィ連続であることである。

（証明）

⇒）命題 2.1 より，p_j がファジィ連続であることから，p_j は相対ファジィ連続である。したがって，合成 $p_j \circ f$ は相対ファジィ連続である。

⇐）まず，

$$U' = U_1' \times \cdots \times U_n',\ U_j' \in (\mathsf{T}_j)_{A_j} \qquad (j=1,\cdots,n)$$

とする。このとき，命題 2.4′より，このような U' の集合は T_A の開基をなす。したがって，

$$\begin{aligned} & f^{-1}[\,U'\,] \cap B \\ &= f^{-1}[\,p_1^{-1}[\,U_1'\,] \cap \cdots \cap p_n^{-1}[\,U_n'\,]] \cap B \\ &= \textstyle\bigcap_{j=1}^{n} ((p_j \circ f)^{-1}[\,U_j'\,] \cap B) \end{aligned}$$

は U_B における開ファジィ集合であり，$p_j \circ f$ が相対ファジィ連続であることから，命題 2.3′より，f は相対ファジィ連続である。

［命題 2.6］　2 つのファジィ位相空間の有限族

$$\{(X_j, \mathsf{T}_j)\}, \{(Y_j, \mathsf{U}_j)\} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

に対し，それぞれの積ファジィ位相空間を

$$(X, \mathsf{T}),\ (Y, \mathsf{U})$$

とし，写像

$$f_j : (X_j, \mathsf{T}_j) \to (Y_j, \mathsf{U}_j)$$

が与えられているとする。このとき，積写像

$$\begin{array}{ccccc} f = \Pi_{j=1}^{n} f_j : & (X, \mathsf{T}) & \to & (Y, \mathsf{U}) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & (f_1(x_1), \cdots, f_n(x_n)) \end{array}$$

がファジィ開であるためには，各 j に対し，f_j がファジィ開であればよい。

（証明）　まず，$U(\in \mathsf{T})$ を開ファジィ集合とすると，

$$U = \bigcup_{m \in M} \Pi_{j=1}^{n} U_{jm} \qquad (m \in M,\ j=1,2,\cdots,n)$$

であるような $U_{jm} \in \mathsf{T}_j$ が存在する。このとき，各 $y \in Y$ に対し，

$$\begin{aligned} & f[\,U\,](y) \\ &= \bigcup_{m \in M} f[\,\Pi_{j=1}^{n} U_{jm}\,](y) \\ &= \bigvee_{m \in M} \bigvee_{z \in f^{-1}(y)} \Pi_{j=1}^{n} U_{jm}(z) \\ &= \bigvee_{m \in M} \bigvee_{z_1 \in f^{-1}(y_1)} \cdots \bigvee_{z_n \in f^{-1}(y_n)} [\,U_{1m}(z_1) \wedge \cdots \wedge U_{nm}(z_n)] \\ &= \bigvee_{m \in M} \left[\bigvee_{z_1 \in f^{-1}(y_1)} U_{1m}(z_1) \wedge \cdots \wedge \bigvee_{z_n \in f^{-1}(y_n)} U_{nm}(z_n) \right] \\ &= \bigvee_{m \in M} [\,f_1[\,U_{1m}\,](y_1) \wedge \cdots \wedge f_n[\,U_{nm}\,](y_n)] \\ &= \bigcup_{m \in M} \Pi_{j=1}^{n} (f_j[\,U_{jm}\,])(y) \end{aligned}$$

$$\therefore\ \ f[\,U\,] = \bigcup_{m \in M} \Pi_{j=1}^{n} (f_j[\,U_{jm}\,])$$

したがって，f_j がファジィ開であることから，f もまたファジィ開であることが示された。

(Q. E. D.)

［命題 2.6′］　2つのファジィ位相空間の有限族

$$\{(X_j, \mathsf{T}_j)\}, \{(Y_j, \mathsf{U}_j)\} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

に対し，それぞれの積ファジィ位相空間を

$$(X, \mathsf{T}),\ (Y, \mathsf{U})$$

とし，$A_j \in \mathsf{L}(X_j), B_j \in \mathsf{L}(Y_j)$ に対し，写像

$$f_j : (A_j, (\mathsf{T}_j)_{A_j}) \to (B_j, (\mathsf{U}_j)_{B_j})$$

が与えられているとする。ここで，

$$A = \Pi_{j=1}^{n} A_j \in \mathsf{L}(X)$$
$$B = \Pi_{j=1}^{n} B_j \in \mathsf{L}(Y)$$

とするとき，積写像

$$\begin{array}{rccc} f = \Pi_{j=1}^{n} f_j : & (A, \mathsf{T}_A) & \to & (B, \mathsf{U}_B) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & (f_1(x_1), \cdots, f_n(x_n)) \end{array}$$

が相対ファジィ開であるためには，各 j に対し，f_j が相対ファジィ開であればよい。

（証明）　$U' \in \mathsf{T}_A$ に対し，命題 2.4′より

$$U' = \bigcup_{m \in M} \Pi_{j=1}^{n} U'_{jm}$$

であるような開ファジィ集合 $U'_{jm} \in (\mathsf{T}_j)_{A_j}$ が存在する。このとき，命題 2.6 の証明と同様にして，

$$f[U'] = \bigcup_{m \in M} \Pi_{j=1}^{n} (f_j[U'_{jm}])$$

となるので，f_j が相対ファジィ開であることから，$f = \Pi_{j=1}^{n} f_j$ もまた相対ファジィ開であることがわかる。

(Q. E. D.)

［命題 2.7］　2つのファジィ位相空間 (X_1, T_1)，(X_2, T_2) に対し，それらの積ファジィ位相空間を (X, T) とするとき，写像

$$\begin{array}{rccc} i : & (X_2, \mathsf{T}_2) & \to & (X, \mathsf{T}) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x_2 & \mapsto & (a_1, x_2) \end{array} \qquad (\forall a_1 \in X_1)$$

はファジィ連続である。

（証明）　定値写像

$$\begin{array}{rccc} i_1 : & (X_2, \mathsf{T}_2) & \to & (X_1, \mathsf{T}_1) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x_2 & \mapsto & a_1 \end{array}$$

はファジィ連続であるので，$U_1 \in \mathsf{T}_1$ ならば

$$i_1^{-1}[U_1](x_2) = U_1(a_1) = k_c(x_2) \qquad (\forall x_2 \in X_2)$$

であることから

$$k_c \in \mathsf{T}_2 \qquad (c = U_1(a_1))$$

といえる。したがって，恒等写像

$$\begin{array}{rccc} i_2 : & (X_2, \mathsf{T}_2) & \to & (X_2, \mathsf{T}_2) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x_2 & \mapsto & x_2 \end{array}$$

はファジィ連続であるので，命題 2.5 より，写像 i はファジィ連続である。

(Q. E. D.)

［命題 2.7′］　2つのファジィ位相空間 (X_1, T_1)，(X_2, T_2) に対し，それらの積ファジィ位相空間を (X, T) とし，

$$A_1 \in \mathsf{L}(X_1), A_2 \in \mathsf{L}(X_2), A \in \mathsf{L}(X)$$

とするとき，

$$A_1(a_1) \geqq A_2(x_2) \qquad (\forall x_2 \in X_2)$$

であるならば，写像

$$\begin{array}{rccc} i : & (A_2, (\mathsf{T}_2)_{A_2}) & \to & (A, \mathsf{T}_A) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x_2 & \mapsto & (a_1, x_2) \end{array}$$

は相対ファジィ連続である。

（証明）

$$i[A_2](x_1, x_2) = \begin{cases} A_2(x_2) & (x_1 = a_1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

であること，および

$$A(x_1, x_2) = A_1(x_1) \wedge A_2(x_2)$$
$$\geqq A_2(x_2)$$

であることより，命題 2.7 における i のファジィ連続性の証明と同様にして，ここでの i の相対ファジィ連続性が証明される。

(Q. E. D.)

Ⅲ　ファジィ群

本論文でファジィ群と呼ぶものは，従来はファジィ部分群[9)]と呼ばれているものであることに注意する。

［定義 3.1］　X を群とし，$G \in \mathsf{L}(X)$ とするとき，G が X におけるファジィ群であるとは，

(i)　$G(xy) \geqq G(x) \wedge G(y) \qquad (\forall x, y \in X)$

(ii)　$G(x^{-1}) \geqq G(x) \qquad (\forall x \in X)$

を満たす場合であると定義する。

［命題 3.1］　G が X におけるファジィ群であるための必要十分条件は，

$$G(xy^{-1}) \geq G(x) \wedge G(y) \qquad (\forall x, y \in X)$$

が成立することである。

[命題 3.2]　X, Y を群とし，準同形 $f: X \to Y$ を考える。このとき，G を Y におけるファジィ群とすると，G の逆像 $f^{-1}[G]$ は X におけるファジィ群になっている。

（証明）　$\forall x, y \in X$ に対し，

$$\begin{aligned} f^{-1}[G](xy^{-1}) &= G(f(xy^{-1})) \\ &= G(f(x)(f(y))^{-1}) \\ &\geq G(f(x)) \wedge G(f(y)) \\ &= f^{-1}[G](x) \wedge f^{-1}[G](y) \end{aligned}$$

が成立する。

(Q. E. D.)

[定義 3.2]　$A(\in \mathrm{L}(X))$ が上限性をもつとは，条件

$$\forall T \subset X, \exists t_0 \in T : A(t_0) = \bigvee_{t \in T} A(t)$$

を満たす場合をいう。

[命題 3.3]　X, Y を群とし，準同形 $f: X \to Y$ を考える。このとき，G を上限性をもつ X におけるファジィ群とすると，G の像 $f[G]$ は Y におけるファジィ群になっている。

（証明）$u, v \in Y$ に対し，$f^{-1}(u)$ あるいは $f^{-1}(v)$ のどちらかが空であれば，命題 3.1 の不等式は明らかに成立する。したがって，$f^{-1}(u)$ あるいは $f^{-1}(v)$ のうち，どちらかは空でないと仮定する。すなわち，

$$\exists r_0 \in f^{-1}(u) : G(r_0) = \bigvee_{t \in f^{-1}(u)} G(t)$$

$$\exists s_0 \in f^{-1}(v) : G(s_0) = \bigvee_{t \in f^{-1}(v)} G(t)$$

とすると，

$$\begin{aligned} f[G](uv^{-1}) &= \bigvee_{w \in f^{-1}(uv^{-1})} G(w) \\ &\geq G(r_0) \wedge G(s_0) \\ &= f[G](u) \wedge f[G](v) \end{aligned}$$

である。

(Q. E. D.)

[定義 3.3]　X, Y を群とし，準同形 $f: X \to Y$ を考える。ここで，G を X におけるファジィ群とすると，G が f-不変であるとは，

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow G(x_1) = G(x_2) \qquad (\forall x_1, x_2 \in X)$$

を満たす場合をいう。

[命題 3.4]　G を群 X におけるファジィ群とするとき，

$$G(x^{-1}) = G(x), G(e) \geq G(x) \qquad (\forall x \in X)$$

が成立する。ここで，e は X の単位元とする。また，

$$G_e = \{x \mid G(x) = G(e)\}$$

は X の部分群である。

[定義 3.4]　群 X に対し，$x, a \in X$ とするとき，２つの写像

$$\rho_a : x \mapsto xa, \qquad \lambda_a : x \mapsto ax$$

をそれぞれ，X 自身への右移動，左移動と呼ぶ。

[命題 3.5]　G を群 X におけるファジィ群とするとき，

$$\forall a \in G_e,\ \rho_a[G] = \lambda_a[G] = G$$

が成立する。

（証明）　命題 3.4 より，

$$G(a^{-1}) = G(a) = G(e)$$

であることから，$\forall x \in X$ に対し，

$$\rho_a[G](x) = G(xa) \geq G(x) \wedge G(e) = G(x)$$

また，

$$\begin{aligned} G(x) &= G(xaa^{-1}) \geq G(xa) \wedge G(e) = G(xa) \\ &= \rho_a[G](x) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \rho_a[G] = G$$

λ_a の場合も同様に示される。

(Q. E. D.)

Ⅳ　ファジィ位相群

G を群 X におけるファジィ群とし，２つの写像

$$\begin{array}{cccccc} \alpha : X \times X & \to & X, & \qquad \beta : X & \to & X \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x, y) & \mapsto & xy & x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

に対し，$\alpha[G \times G]$ および $\beta[G]$ は G のファジィ部分集合になる。実際，

$$\alpha[G \times G] = \bigvee_{(z_1, z_2) \in \alpha^{-1}(x)} (G \times G)(z_1, z_2)$$

$$= \bigvee_{(z_1, z_2) \in \alpha^{-1}(x)} \{ G(z_1) \wedge G(z_2) \}$$

$$\cdot \bigvee_{(z_1, z_2) \in \alpha^{-1}(x)} G(z_1 z_2)$$

$$= G(x) \qquad (\forall x \in X)$$

$$\therefore \quad \alpha[\, G \times G \,] \subset G$$

また，命題 3.4 より

$$G(x) = G(x^{-1}) \qquad (\forall x \in X)$$

$$\therefore \quad \beta[\, G \,] \subset G$$

となるからである。

X にファジィ位相 $\mathcal{T}$ が与えられれば，G による誘導ファジィ位相 $\mathcal{T}_G$ を考えることができるので，$(G, \mathcal{T}_G)$ は $(X, \mathcal{T})$ のファジィ部分空間となり，$(G, \mathcal{T}_G) \times (G, \mathcal{T}_G)$ は積ファジィ位相空間 $(X, \mathcal{T}) \times (X, \mathcal{T})$ のファジィ部分空間となる。

群 X におけるファジィ位相群は，次のように定義される。[11)]

［定義 4.1］ 群 X に対し，$\mathcal{T}$ を X 上のファジィ位相とし，G を X におけるファジィ群，$\mathcal{T}_G$ を G による誘導ファジィ位相とする。このとき，G が X におけるファジィ位相群であるとは，次の 2 つの条件を満たす場合をいう。

(i)
$$\begin{array}{rccc} \alpha : & (G, \mathcal{T}_G) \times (G, \mathcal{T}_G) & \to & (G, \mathcal{T}_G) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$$

が相対ファジィ連続である。

(ii)
$$\begin{array}{rccc} \beta : & (G, \mathcal{T}_G) & \to & (G, \mathcal{T}_G) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

が相対ファジィ連続である。

［命題 4.1］ 群 X に対し，$\mathcal{T}$ を X 上のファジィ位相とするとき，X におけるファジィ群 G がファジィ位相群となるための必要十分条件は，

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & (G, \mathcal{T}_G) \times (G, \mathcal{T}_G) & \to & (G, \mathcal{T}_G) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x, y) & \mapsto & xy^{-1} \end{array}$$

が相対ファジィ連続であることである。

(証明)

⇒) 命題 2.5′より，写像

$$\begin{array}{ccc} (G, \mathcal{T}_G) \times (G, \mathcal{T}_G) & \to & (G, \mathcal{T}_G) \times (G, \mathcal{T}_G) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x, y) & \mapsto & (x, y^{-1}) \end{array}$$

は相対ファジィ連続である。したがって，合成

$$(x, y) \mapsto (x, y^{-1}) \mapsto xy^{-1}$$

は相対ファジィ連続である。

⇐) 命題 3.4 より，

$$G(e) \geq G(x) \qquad (\forall x \in X)$$

である。したがって，命題 2.7′より，自然な単射

$$\begin{array}{rccc} i : & (G, \mathcal{T}_G) & \to & (G, \mathcal{T}_G) \times (G, \mathcal{T}_G) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & y & \mapsto & (e, y) \end{array}$$

は相対ファジィ連続である。ゆえに，合成

$$\beta : y \mapsto (e, y) \mapsto ey^{-1}$$

は相対ファジィ連続である。また，写像

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & (G, \mathcal{T}_G) \times (G, \mathcal{T}_G) & \to & (G, \mathcal{T}_G) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$$

も相対ファジィ連続である。なぜなら，これは相対ファジィ連続な写像の合成

$$(x, y) \mapsto (x, y^{-1}) \mapsto x(y^{-1})^{-1}$$

と見なせるからである。

(Q. E. D.)

G が群 X におけるファジィ位相 $\mathcal{T}$ をもつファジィ位相群であるとき，一般に，写像

$$\rho_a : x \mapsto xa, \qquad \lambda_a : x \mapsto ax \quad (a \in X)$$

は相対ファジィ連続ではない。

しかしながら，次の特殊な場合がある。

［命題 4.2］ G が群 X におけるファジィ位相 $\mathcal{T}$ をもつファジィ位相群であるとき，

$$a \in G_e = \{ x \mid G(x) = G(e) \}$$

に対し，写像 ρ_a, λ_a は $(G, \mathcal{T}_G)$ から $(G, \mathcal{T}_G)$ 自身への相対ファジィ位相同形である。

(証明) 命題 3.5 より

$$\rho_a[\, G \,] = G, \ \lambda_a[\, G \,] = G \qquad (\forall a \in G_e)$$

である。写像 λ_a は，単射 $i : y \mapsto (a, y)$ と写像 $\alpha : (x, y) \mapsto xy$ の合成であり，

$$\lambda_a : y \mapsto (a, y) \mapsto ay$$

と見なすことができる。このとき，

$$G(a) \geq G(y) \qquad (\forall y \in Y)$$

であることから，命題 2.7′より

$$\begin{array}{rccc} i : & (G, \mathcal{T}_G) & \to & (G, \mathcal{T}_G) \times (G, \mathcal{T}_G) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & y & \mapsto & (a, y) \end{array}$$

は相対ファジィ連続である。α は相対ファジィ連続であるから，λ_a も相対ファジィ連続であり，

$\lambda_a^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$

が成立するので，λ_a^{-1} もまた相対ファジィ連続である。ρ_a と ρ_a^{-1} の相対ファジィ連続性も同様に示される。

(Q. E. D.)

Ⅴ　ファジィ位相群における準同形

X, Y を群とし，準同形 $f : X \to Y$ を考える。Y はファジィ位相 U をもち，G は Y におけるファジィ位相群であるとする。このとき，写像 f は X におけるファジィ位相 T，すなわち，U の逆像を引き起こす。また，命題 3.2 により，X におけるファジィ位相群である G の逆像 $f^{-1}[G]$ をも引き起こすのである。

次の命題は，$f^{-1}[G]$ による誘導ファジィ位相の構造とファジィ群の構造とが両立することを示している。

［命題 5.1］　2 つの群 X，Y に対し，準同形 $f : X \to Y$ を考える。Y 上のファジィ位相 U に対し，X は U の逆像になっているファジィ位相 T をもち，G は Y におけるファジィ位相群とする。このとき，G の逆像 $f^{-1}[G]$ は X におけるファジィ位相群である。

（証明）　写像

$$\gamma_X : (f^{-1}[G], \mathsf{T}_{f^{-1}[G]}) \times (f^{-1}[G], \mathsf{T}_{f^{-1}[G]}) \to (f^{-1}[G], \mathsf{T}_{f^{-1}[G]}) : (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2^{-1}$$

が相対ファジィ連続であることを示そう。まず，$U' \in \mathsf{T}_{f^{-1}[G]}$ とすると，

$$f : (X, \mathsf{T}) \to (Y, \mathsf{U})$$

はファジィ連続であるから，命題 2.1 より

$$f : (f^{-1}[G], \mathsf{T}_{f^{-1}[G]}) \to (G, \mathsf{U}_G)$$

は相対ファジィ連続である。したがって，

$$\exists V' \in \mathsf{U}_G : f^{-1}[V'] = U'$$

といえる。ここで，

$$\begin{aligned}\gamma_X^{-1}[U'](x_1, x_2) &= U'(x_1 x_2^{-1})\\ &= f^{-1}[V'](x_1 x_2^{-1})\\ &= V'(f(x_1)(f(x_2))^{-1})\\ &\quad (\forall (x_1, x_2) \in X \times X)\end{aligned}$$

であり，仮定により，写像

$$\gamma_Y : (G, \mathsf{U}_G) \times (G, \mathsf{U}_G) \to (G, \mathsf{U}_G)$$
$$(y_1, y_2) \mapsto y_1 y_2^{-1}$$

は相対ファジィ連続であるから，命題 2.5′により，積写像

$$f \times f : (f^{-1}[G], \mathsf{T}_{f^{-1}[G]}) \times (f^{-1}[G], \mathsf{T}_{f^{-1}[G]}) \to (G, \mathsf{U}_G) \times (G, \mathsf{U}_G)$$

もまた相対ファジィ連続である。ここで，

$$\begin{aligned}V'(f(x_1)(f(x_2))^{-1}) &= \gamma_Y^{-1}[V'](f(x_1), f(x_2))\\ &= (f \times f)^{-1}[\gamma_Y^{-1}[V']](x_1, x_2)\\ &\quad (\forall (x_1, x_2) \in X \times X)\end{aligned}$$

であることから

$$\begin{aligned}&\gamma_X^{-1}[U'] \cap (f^{-1}[G] \times f^{-1}[G])\\ &= (f \times f)^{-1}[\gamma_Y^{-1}[V']](f^{-1}[G] \times f^{-1}[G])\\ &\in \mathsf{T}_{f^{-1}[G] \times f^{-1}[G]}\end{aligned}$$

である。

(Q. E. D.)

次の命題は，準同形の像についても同様の命題が成立することを示している。

［命題 5.2］　2 つの群 X，Y に対し，準同形 $f : X \to Y$ を考える。X 上のファジィ位相 T に対し，Y は T の像になっているファジィ位相 U をもち，G は X におけるファジィ位相群とする。このとき，G が f- 不変であれば，G の像 $f[G]$ は Y におけるファジィ位相群である。

（証明）　命題 3.3 より，$f[G]$ はファジィ群である。したがって，写像

$$\gamma_Y : (f[G], \mathsf{U}_{f[G]}) \times (f[G], \mathsf{U}_{f[G]}) \to (f[G], \mathsf{U}_{f[G]}) : (y_1, y_2) \mapsto y_1, y_2^{-1}$$

が相対ファジィ連続であることを示そう。ここで，

$$U \in \mathsf{T} \Rightarrow f[U] \in \mathsf{U}$$

であるから，f はファジィ開であり，

$$f^{-1}[f[U]] \in \mathsf{T}$$

といえる。このとき，

$$U' \in \mathsf{T}_G \Rightarrow \exists U \in \mathsf{T} : U' = U \cap G$$

であり，また，G の f- 不変性より

$$f[U'] = f[U] \cap f[G] \in \mathsf{U}_{f[G]}$$

であることから，f は相対ファジィ開であることがわかる。さらに，命題 2.6′より，積写像

$$f\times f:(G,\mathrm{T}_G)\times(G,\mathrm{T}_G)\\ \to(f[G],\mathrm{U}_{f[G]})\times(f[G],\mathrm{U}_{f[G]})$$

もまた相対ファジィ開であることがわかる。

ここで，

$$V'\in\mathrm{U}_{f[G]}$$

とすると，G の f-不変性より

$$(f\times f)^{-1}[\gamma_Y^{-1}[V']\cap(f[G]\times f[G])]\\ =(f\times f)^{-1}[\gamma_Y^{-1}[V']]\cap(G\times G)\\ \in\mathrm{T}_{G\times G}$$

であり，$f\times f$ は相対ファジィ開であるから，

$$(f\times f)(f\times f)^{-1}[\gamma_Y^{-1}[V']\cap(f[G]\times f[G])]\\ =\gamma_Y^{-1}[V']\cap(f[G]\times f[G])\\ \in\mathrm{U}_{f[G]\times f[G]}$$

である。

(Q. E. D.)

Ⅵ　商ファジィ位相群と積ファジィ位相群

X をファジィ位相 T をもつ群とし，G を X におけるファジィ位相群とする。また，N を X の正規部分群とし，写像

$$\varphi:X\to X/N$$

を自然な全射の準同形とする。このとき，商ファジィ群は次のように定義される。

［定義 6.1］　上の条件のもとで，G が N 上で定値ファジィ集合であれば，G は φ-不変であり，$\varphi[G]$ は商群 X/N におけるファジィ群である。これを商ファジィ群と呼び，G/N と表す。

命題 5.2 より，明らかに次の命題が成立する。

［命題 6.1］　上の条件のもとで，商群 X/N は T の像であるファジィ位相を与えているものとする。このとき，G が N 上で定値ファジィ集合であるならば，商ファジィ群 G/N は X/N におけるファジィ位相群である。

上で述べた商群 X/N 上のファジィ位相のことを商ファジィ位相と呼び，G/N のことを商ファジィ位相群と呼ぶことにする。

［命題 6.2］　2 つの群 X, Y に対し，X から Y の上への準同形 $f:X\to Y$ を考える。T, U をそれぞれ X, Y 上のファジィ位相とし，f はファジィ連続かつファジィ開であるとする。また，G を X におけるファジィ位相群とし，G は f の核 $f^{-1}(e)$ で定値であるとする。さらに，商群 $X/f^{-1}(e)$ は商ファジィ位相をもつとする。このとき，以下のことがらが成立する。

（i）　ファジィ群 $G/f^{-1}(e)$ および $f[G]$ は，それぞれ $X/f^{-1}(e)$ および Y におけるファジィ位相群である。

(ii)　自然な同形

$$\bar{f}:X/f^{-1}(e)\to Y$$

は相対ファジィ位相同形

$$\bar{f}:G/f^{-1}(e)\to f[G]$$

になっている。

(証明)

（i）　$G/f^{-1}(e)$ が $X/f^{-1}(e)$ におけるファジィ位相群であることは，命題 6.1 より明らかである。また，f がファジィ連続かつファジィ開であることから，

$$f(\mathrm{T})=\mathrm{U}$$

である。なぜなら，$V(\in\mathrm{L}(Y))$ に対し，

$$f^{-1}[V]\in\mathrm{T}\Rightarrow f[f^{-1}[V]]=V\in\mathrm{U}$$

であり，逆に

$$V\in\mathrm{U}\Rightarrow f^{-1}[V]\in\mathrm{T}$$

であるからである。したがって，命題 5.2 より，$f[G]$ は Y におけるファジィ位相群である。

(ii)　まず，

$$V'\in\mathrm{U}_{f[G]},\ \varphi:X\to X/f^{-1}(e)$$

とすると，

$$f^{-1}[V']=\varphi^{-1}[\bar{f}^{-1}[V']]\in\mathrm{T}_G$$

である。なぜなら，f が相対ファジィ連続であり，

$$\bar{f}^{-1}[V']\in\mathrm{T}_{G/f^{-1}(e)}$$

であって，かつ φ が相対ファジィ開であるからである。逆に，

$$U'\in\mathrm{T}_{G/f^{-1}(e)}$$

とすると，

$$\varphi^{-1}[U']=f^{-1}[\bar{f}[U']]\in\mathrm{T}_G$$

であり，f が相対ファジィ開であることから

$$\bar{f}[U']\in\mathrm{U}_{f[G]}$$

といえるからである。

(Q. E. D.)

さて，$\{X_j\}$（$j=1, 2, \cdots, n$）を群の有限族とし，その直積 $X=\Pi_{j=1}^{n} X_j$ を考える。また，X_j はファジィ位相 T_j をもち，G_j は X_j におけるファジィ位相群とする。このとき，X 上の積ファジィ集合 $G=\Pi_{j=1}^{n} G_j$ は

$$G(x) = G_1(x_1) \wedge \cdots \wedge G_n(x_n) \qquad x = (x_1, \cdots, x_n)$$

で与えられる。したがって，$\forall x, y \in X$ に対し，

$$\begin{aligned} &G(xy^{-1}) \\ &= G(x_1 y_1^{-1}, \cdots, x_n y_n^{-1}) \\ &= G_1(x_1 y_1^{-1}) \wedge \cdots \wedge G_n(x_n y_n^{-1}) \\ &\geq \{G_1(x_1) \wedge G_1(y_1)\} \wedge \cdots \wedge \{G_n(x_n) \wedge G_n(y_n)\} \\ &= \{G_1(x_1) \wedge \cdots \wedge G_n(x_n)\} \wedge \{G_1(y_1) \wedge \cdots \wedge G_n(y_n)\} \\ &= G(x) \wedge G(y) \end{aligned}$$

が成立する。したがって，G をファジィ群 G_j（$j=1, 2, \cdots, n$）の積と呼ぶ。

直積 $X=\Pi_{j=1}^{n} X_j$ には積ファジィ位相が与えられる。次の命題は，G による誘導ファジィ位相と積ファジィ群の構造とが両立することを示している。

［命題 6.3］　$\{X_j\}$（$j=1, 2, \cdots, n$）を群の有限族とし，T_j を X_j 上のファジィ位相，G_j を X_j におけるファジィ位相群とする。また，直積 $X=\Pi_{j=1}^{n} X_j$ は積ファジィ位相 T をもつとする。このとき，積ファジィ群 $G=\Pi_{j=1}^{n} G_j$ は X におけるファジィ位相群である。

（証明）　写像

$$\begin{array}{ccccc} \gamma : (G, \mathrm{T}_G) & \times & (G, \mathrm{T}_G) & \rightarrow & (G, \mathrm{T}_G) \\ & \cup\!\!\!| & & & \cup\!\!\!| \\ & (x, y) & & \mapsto & xy^{-1} \end{array}$$

は

$$\begin{aligned} \gamma_1 : (x, y) = ((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) \\ \mapsto ((x_1, y_1), \cdots, (x_n, \cdots, y_n)) \end{aligned}$$

と

$$\gamma_2 : ((x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)) \mapsto (x_1 y_1^{-1}, \cdots, x_n y_n^{-1})$$

との合成と見なせる。このとき，命題 2.5 と命題 2.1 により，γ_1 は相対ファジィ連続である。また，命題 2.5′により，γ_2 は相対ファジィ連続である。したがって，γ は相対ファジィ連続である。

（Q. E. D.）

上述の $G=\Pi_{j=1}^{n} G_j$ を積ファジィ位相群と呼ぶ。

命題 6.1 と命題 6.3 により，次の命題を得る。

［命題 6.4］　$\{X_j\}$（$j=1, 2, \cdots, n$）を群の有限族とし，T_j を X_j 上のファジィ位相，N_j を X_j の正規部分群，G_j を N_j で定値であるような X_j におけるファジィ位相群とする。ここで，商群 X/N については，$N=\Pi_{j=1}^{n} N_j$ であり，X_j/N_j（$j=1, 2, \cdots, n$）はそれぞれの商ファジィ位相をもち，直積 $X=\Pi_{j=1}^{n} X_j$ と $\Pi_{j=1}^{n}(X_j/N_j)$ はそれぞれの積ファジィ位相をもつとする。また，$G=\Pi_{j=1}^{n} G_j$ は X における積ファジィ位相群とする。このとき，自然な同形

$$\iota : X/N \rightarrow \Pi_{j=1}^{n}(X_j/N_j)$$

は商ファジィ位相群 G/N から商ファジィ位相群 $\Pi_{j=1}^{n}(G_j/N_j)$ の上への相対ファジィ位相同形である。

（証明）

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & X & \rightarrow & X/N \\ & \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ & x & \mapsto & [x] \end{array}$$

を自然な準同形とし，各 $j=1, 2, \cdots, n$ に対し，

$$\begin{array}{cccc} \varphi_j : & X_j & \rightarrow & X_j/N_j \\ & \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ & x_j & \mapsto & [x_j] \end{array}$$

もまた自然な準同形とする。ここで，

$$\Pi_{j=1}^{n} \varphi_j : X \rightarrow \Pi_{j=1}^{n}(X_j/N_j)$$

を全射である積写像とする。したがって，

$$\iota \circ \varphi = \Pi_{j=1}^{n} \varphi_j$$

である。また，各 $[x] \in X/N$ に対し，

$$\begin{aligned} &(G/N)([x]) \\ &= G(x) \\ &= (\Pi_{j=1}^{n} G_j)(x_1, \cdots, x_n) \\ &= G_1(x_1) \wedge \cdots \wedge G_n(x_n) \\ &= (G_1/N_1)([x_1]) \wedge \cdots \wedge (G_n/N_n)([x_n]) \\ &= (\Pi_{j=1}^{n}(G_j/N_j))(\iota([x])) \end{aligned}$$

が成立する。したがって，命題 6.1 と命題 6.3 により，G/N および $\Pi_{j=1}^{n}(G_j/N_j)$ はファジィ位相群である。このとき，V' を $\Pi_{j=1}^{n}(G_j/N_j)$ による誘導ファジィ位相での開ファジィ集合とすると，

$$\varphi^{-1} \circ \iota^{-1}[V'] = (\Pi_{j=1}^{n} \varphi_j)^{-1}[V']$$

は G による誘導ファジィ位相での開ファジィ集合となる。なぜなら，命題 2.5 と命題 2.1 によって，$\Pi_{j=1}^{n} \varphi_j$ は相対ファジィ連続となるから

である。したがって，φ が相対ファジィ開であることから，$\iota^{-1}[V']$ は G/N による誘導ファジィ位相での開ファジィ集合であることがわかる。ゆえに，ι は相対ファジィ連続である。

逆に，U' を G/N による誘導ファジィ位相での開ファジィ集合とすると，$\varphi^{-1}[U']$ は G による誘導ファジィ位相での開ファジィ集合となり，

$$(\Pi_{j=1}^{n}\varphi_j)(\varphi^{-1}[U']) = \iota[U']$$

は $\Pi_{j=1}^{n}(G_j/N_j)$ による誘導ファジィ位相での開ファジィ集合となる。なぜなら，$\Pi_{j=1}^{n}\varphi_j$ は相対ファジィ開写像の積であり，命題2.6′により相対ファジィ開となるからである。ゆえに，ι は相対ファジィ開である。

(Q. E. D.)

Ⅶ　むすび

L が完備分配束であるような L-ファジィ集合の一般論に基づいて，ファジィ位相群の諸性質を明らかにした。

ファジィ位相群におけるコンパクト性や連結性，あるいは射影的極限などについて論じるのは，今後の課題であろう。

参考文献

1）L. S. Pontrjagin："Topological Groups", Princeton (1939)

2）淡中忠郎："位相群論"，岩波書店（1948）

3）C. Chevalley : "Theory of Lie Groups Ⅰ", Princeton (1946)

4）杉浦光夫："リー群論"，共立出版（2000）

5）L. A. Zadeh："Fuzzy Sets", *Information and Control*, Vol.8, pp.338-353 (1965)

6）J. A. Goguen : "L-Fuzzy Sets", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.18, pp.145-174 (1967)

7）C. L. Chang : "Fuzzy Topological Spaces", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.24, pp.182-190 (1968)

8）R. Lowen : "Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.56, pp.621-633 (1976)

9）A. Rosenfeld : "Fuzzy Groups", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.35, pp.512-517 (1971)

10）和泉孔二："ファジィ部分群およびファジィイデアルの諸性質"，阪南論集社会科学編，第30巻，第4号，pp.139-147（1995）

11）C. Yu, J. Ma : "On Fuzzy Topological Groups", Fuzzy Sets and Systems, Vol.23, pp.281-287 (1987)

12）和泉，田中，浅居："タイプ2—合成ファジィ関係式の解法"，電子通信学会論文誌，Vol.J66-D，No.10，pp.1107-1113（1983）

13）竹内外史："現代集合論入門"，日本評論社 (1971)

（2006年11月28日受付）