〔論　文〕

期待値と標準偏差から得られる新聞売り子問題の解の範囲

青　木　博　明

本稿では，需要量の確率分布は未知だが，その期待値と標準偏差のみが分かっている場合の新聞売り子問題（Newsboy Problem, Newsvendor Problem）の最適解の範囲について議論する。新聞売り子問題とは，新聞や生鮮品のように販売期間を過ぎると価値がなくなる，または減少する商品に適用される最適在庫問題である。期待値と標準偏差は観測データから推定できるが，確率分布は未知という状況はよくあり得，むしろ通常の状況ともいえる。その意味でこのテーマは重要である。

新聞売り子問題において需要量の期待値と標準偏差のみが既知の場合に最適解が取る範囲は，Yue, Chen and Wang（2006）の中で1991年のGallegoの論文が示したことが述べられており，Yue, Chen and Wang（2006）自身も２点分布の確率分布によってその範囲の新しい証明を示している[1)]。

これらの研究以前にScarf（1958）は，与えられた需要量の期待値と標準偏差に対して，考えられる最悪の確率分布の下で最善の在庫量を選ぶというMin-Max選択での在庫量の決定式を示している。このときの最悪の確率分布は２点分布であり，最善の在庫量はその状況下で期待費用を最少化する。この最善の在庫量がScarf's Ruleと呼ばれる式で示されることを証明した（本稿ではこの後Scarf's RuleをScarfの解と呼ぶ）。Gallego and Moon（1993）はそのより簡潔な証明を示し，また適用できる状況を拡張し，需要量確定後の再発注，固定の発注費などを導入している。Yue（2012）は最適解の範囲についてより直接的であるとする証明を示し，またサルベージ価格を導入している。

これらに対して，本稿では，Yue（2012）が導入したサルベージ価格に加えて，ペナルティ価格を含む，より一般的な状況下での最適解の範囲を示している。上記の文献では，最適解の範囲を示す証明をより簡潔にしたと述べているが，それでもかなり複雑である。それに対して，本稿では，片側のチェビシェフの不等式を利用して簡潔に示している。サルベージ価格とは売れ残った分の価格であり，例えば仕入れ元が売れ残り分を買い戻す価格になる。ペナルティ価格とは品切れによって生じる販売先への賠償金や信用へのダメージ，その後の顧客の需要行動へのマイナスの影響などを費用として数値化したものといえる。これらのサルベージ価格とペナルティ価格をモデルに導入することで，より広い範囲の財を新聞売り子の問題に適用できるようになる。

さらに現実的な状況に適用するために，複数財の資源制約下での新聞売り子問題の最適解の範囲についても論じる。複数財の資源制約下ではラググランジェ乗数λの値を知る必要があるが，このλは確率分布が分からなくても，使用資源量が所与資源量に一致するという条件を利用することで得られることを示す。

本稿では，サルベージ価格とペナルティ価格を含まないシンプルなモデルを基本モデルと呼ぶが，まずこの基本モデルにおいて片側のチェビシェフの不等式を利用して最適解の範囲を特定する。この方法はサルベージ価格とペナルティ価格を含むモデルおよび複数財の資源制約下のモデルにも適用できる汎用性の高いものである。

上述の最悪の確率分布の下で最善の在庫量を選ぶScarfの解が，期待値と標準偏差のみが既知のときの解の範囲の平均値に一致することは，Yue, Chen and Wang（2006）がすでに言及しており，ゆえに

Scarfの解をRobustとしているが，その根拠は述べていない。このRobustの意味を考察する。最適解の利益つまり最大利益と予測値に基づく利益の差は利益の損失（乖離）といえるが，これは在庫量の最適解とその予測値の損失よりも企業の利益により直結する。利益の損失関数が近似的に解の損失関数に比例することを示しつつ，Scarfの解が，需要量の期待値と標準偏差のみが既知のときの新聞売り子問題の解としてRobustであることの意味を示す。

以上の議論は，新聞売り子問題の期待費用の最小化の枠組みで論じられる研究が多いが，本稿では，期待利益の最大化の枠組みで論じている。付録1で期待費用の最小化と期待利益の最大化が同値であることを確認している。本稿の議論において鍵となる分析道具である片側チェビシェフの不等式で左辺と右辺を関係づける不等式は，通常，弱不等号「≤」で示されるが，本稿では強不等号「＜」での成立を前提とする。その根拠を付録2で示す[2)]。ただし，命題1）の後で述べているように，片側のチェビシェフの不等式が「≤」または「<」のどちらで成立するかは本質的な問題ではないといえる。

本稿の構成は次のようになっている。まず新聞売り子問題の基本モデルと期待利益の最大化条件を示す。その後，片側チェビシェフの不等式を利用して，期待値と標準偏差のみが既知のときの基本モデルの最適解の範囲を示す。Scarfの解と需要量の確率分布が正規分布または一様分布のときの解を図示して，その比較を行う。Scarfの解の頑強性の意味を確認する。サルベージ価格とペナルティ価格を導入して一般化したモデルの最適解の範囲を示し，続いて複数財で資源制約下の最適解の範囲とScarfの解を示す。最後に2つの付録を付けている。

キーワード：新聞売り子問題，在庫問題，任意の確率分布，片側のチェビシェフの不等式，期待値，
標準偏差

Ⅰ　新聞売り子問題の基本モデルと期待利益の最大化

新聞や生鮮品のように販売期間を過ぎると価値がなくなる，または減少する商品である新聞タイプの商品を考える。商品の販売期間における需要量をx，売上量をy，売値をp，仕入値をc，利益をR，そして期首の在庫量をaとおく。当然ながら$0<c<p$とする。需要量xは連続的な確率変数とし，その確率分布を$f(x)$，期待値をμ，標準偏差をσとする。ここでは，まず基本的なモデルを考え，売れ残りに対するサルベージ価格と売り切れに対するペナルティ費用は考えない。それらはⅤのより一般化した新聞売り子モデルで考える。

売上量は仕入量と在庫量との関係から次の2つの場合に分かれる。需要量xが在庫量a以下のときは，売上量$y=$ 需要量xとなり，需要量が在庫量より多いときには，売上量$y=$ 在庫量aとなる。利益Rは厳密にいえば粗利益であり，次の（1）で示される。（1）の（　）内の条件は，簡潔に$y=\mathrm{Min}(x, a)$とも記述できる。$R(x, a)$はRがxとaの関数であることを示す。

$$R=R(x,a)=py-ca \qquad (if\ x<a\ then\ y=x, \quad if\ x\geq a\ then\ y=a) \tag{1}$$

上の利益$R(x, a)$の期待利益をERとおき，$ER(a)$をそのaに対する関数とする。$ER=ER(a)$は，（1）にしたがい$0\leq x<a$と$a\leq x$の範囲に分けて次の式によって得られる。

$$ER=ER(a)=\int_0^{\infty}R(x,a)dx=p(\int_0^{a}xf(x)dx+\int_a^{\infty}af(x)dx) \ - \ ca \tag{2}$$

このモデルを本稿では新聞売り子問題の基本モデルと呼ぶ。この$ER = ER(a)$をaによって最大化することを考える。$ER(a)$をaで微分して0とすることで，次の最大化条件が得られる。

$$\frac{dER}{da} = p\int_a^\infty f(x)dx - c = 0 \tag{3}$$

次に示すように2階の条件は満たされている。

$$d^2ER/da^2 = -pf(a) \leq 0 \tag{4}$$

(3)の最大条件は次のように変形できる。最大化条件を満たすaをa^*とおく。P(　)は(　)内の事象の確率を示す。

$$\int_{a^*}^\infty f(x)dx = \mathrm{P}(a^* \leq x) = c/p \qquad \text{最大化条件} \tag{5}$$

この左辺と中の式は在庫量がa^*のときの売切れ確率であり，これが右辺のc/pに一致すれば，最大化条件を満たすことになる。よってこの条件は売切れ率（確率）条件を呼ぶこともできる。

a^*によって実現される最大期待利益をER^*とおく。(5)を満たすa^*を(2)のERに代入することで，次が得られる。(6)からER^*は非負となることが分る。

$$ER^* = ER(a^*) = p\int_0^{a^*} xf(x)dx \;\geq\; 0 \tag{6}$$

Ⅱ　期待値と標準偏差に対する新聞売り子問題の基本モデルの最適解a^*の範囲

任意の確率分布について，その期待値をμと標準偏差をσとすると，任意の$k > 0$に対して，次の片側のチェビシェフの不等式が成り立つ。

$$\mathrm{P}(x - \mu \leq -k\sigma) < \frac{1}{k^2+1}, \quad \mathrm{P}(x - \mu \geq k\sigma) < \frac{1}{k^2+1} \tag{7}$$

この左の式が分布の下側累積に関するもので，右の式が上側累積に関するものである。通常，片側のチェビシェフの不等式では，右辺との比較は弱不等号「≤」とされるが，ここでは強不等号「<」としている。その根拠は付録2で示している。ただし「≤」としても議論は本質的に変わらないといえる。その理由は命題1の証明の後に記している。この片側のチェビシェフの不等式を利用すれば，新聞売り子の基本モデルの最適解a^*の範囲について次の命題を得る。

〈命題1〉

任意の確率分布$f(x)$にしたがう需要量xに対して，基本モデルの最適解a^*は次の範囲に入る。

$$\mu - \sigma\sqrt{\frac{c}{p-c}} < a^* < \mu + \sigma\sqrt{\frac{p-c}{c}} \tag{8}$$

（証明）

$k = \sqrt{(1-t)/t}$ とおくと $1/(k^2+1) = t$である。これを(7)の右の不等式に代入すると次を得る。

$$\mathrm{P}(x \geq \mu + \sigma\sqrt{(1-t)/t}\,) < t \tag{9}$$

ここで$t=c/p$とおくと$k>0$となり次を得る。

$$\mathrm{P}(x \geq \mu+\sigma\sqrt{(p-c)/c}\,) < c/p \tag{10}$$

もし$a^* \geq \mu+\sigma\sqrt{(p-c)/c}$ならば$\mathrm{P}(a^* \leq x) < c/p$となり（5）の最大化条件を満たさない。よって$a^* < \mu+\sigma\sqrt{(p-c)/c}$である。（7）の左の不等式の両辺を1より引くと次を得る。

$$\mathrm{P}(x-\mu > k\sigma) > \frac{k^2}{k^2+1} \tag{11}$$

次に$k=\sqrt{t/(1-t)}$とおくと$k^2/(k^2+1)=t$である。これを(10)に代入すると次を得る。

$$\mathrm{P}(x > \mu-\sigma\sqrt{t(1-t)}\,) > t \tag{12}$$

ここで$t=c/p$とおくと$k>0$となり次を得る。

$$\mathrm{P}(x > \mu-\sigma\sqrt{c/(p-c)}\,) > c/p \tag{13}$$

もし$a^* \leq \mu-\sigma\sqrt{c/(p-c)}$ならば$\mathrm{P}(a^* \leq x) > c/p$となり（5）を満たさない。よって$a^* > \mu-\sigma\sqrt{c/(p-c)}$を得る。先に得た$a^*$の範囲と合わせて（8）を得る。　Q.E.D

（8）の左辺が負となる場合もあるが，在庫量は非負なので，左辺は厳密にはMax(0, a^*)となる。このことは後出のモデルでも同様である[3)]。もし（7）のチェビシェフの不等式が弱不等号「≤」で成立するとしても，命題1の証明から分るように，$f(a)$の累積確率である$F(a)$が狭義の単調増加関数，つまり$f(a)>0$ならば，（8）は弱不等号で成立する。その意味で片側のチェビシェフの不等式が「≤」または「<」のどちらで成立するかは本質的な問題ではないといえるかもしれない。後出の一般的なモデルでの（8）と同様の解の不等式においても同じことがいえる。

命題1の証明において$t=c/p$は最大化条件（5）の右辺になっているが，後でも示すように，新聞売り子問題のより一般的なモデルにおいてもtを（5）に相当する期待利益の最大化条件の右辺におくことで同様の命題を得る。その意味でも命題1の片側のチェビシェフの不等式を利用する証明方法は汎用性が高い。

（8）でa^*が取り得る範囲の下限をa^L，上限をa^Rとおき$t=c/p$とすると（8）は次で示される。

$$a^L \equiv \mu-\sigma\sqrt{\frac{t}{1-t}} < a^* < \mu+\sigma\sqrt{\frac{1-t}{t}} \equiv a^R \tag{14}$$

この不等式も，他の新聞売り子問題のモデルにおいて最大化条件の右辺をtに置き換えれば同様に成り立つ。また(14)に関する次の性質1もtを同様に置き換えればあてはまる。

(14)のa^*の範囲の下限a^Lと上限a^Rは，ともに$t=c/p$が増えるにしたがって減る。またその差を$S=a^L-a^R$とおくと，Sは$t=1/2$で最小値2σを取り，かつtが1/2から左右に離れるにしたがって大きくなる。これらのことを証明を付して性質1としてまとめる。

〈性質1〉

(a)　a^*が取り得る範囲の下限a^Lと上限a^Rは，ともにtが増えるにしたがって小さくなる。

(b)　a^L と a^R の差 S は $t = 1/2$ で最小値 2σ をとり，$t = 1/2$ から左右に離れるにしたがって大きくなる。

(証明)

$A = \sqrt{t/(1-t)}$，$B = \sqrt{(1-t)/t}$ とすると $a^L = \mu - \sigma A$, $a^R = \mu + \sigma B$ となり，次を得る。

$$dA/dt = (1/2)((1-t)/t)^{1/2}(1/(1-t)^2) > 0,\quad dB/dt = -(1/2)(t/(1-t))^{1/2}(1/t^2) < 0$$

よって a^L, a^R ともに t が増えるにしたがって減り (a) が示された。

次に $S = a^L - a^R$ とおくと $S = \sigma(A+B)$ となる。この S を t で微分すると $dS/dt = \sigma(dA/dt + dB/dt)$ を得る。$C = dA/dt$, $D = dB/dt$ とおくと，$dS/dt = \sigma(C+D) = \sigma C(D/C+1)$ となり，次が成り立つ。

$$D/C = \frac{-(t/(1-t))^{1/2}(1/t^2)}{((1-t)/t)^{1/2}(1/(1-t))^2} = 1 - \frac{1}{t} \tag{15}$$

$C > 0$ より以下が成り立つ。

1）$0 < t < 1/2$ のとき　$D/C = 1 - 1/t < -1$　$\therefore$　$dS/dt = \sigma C\ (D/C + 1) < 0$
2）$t = 1/2$ のとき　$D/C = 1 - 1/t = -1$　$\therefore$　$dS/dt = \sigma C\ (D/C + 1) = 0$
3）$1/2 < t < 1$ のとき　$D/C = 1 - 1/t > -1$　$\therefore$　$dS/dt = \sigma C\ (D/C + 1) > 0$

よって S は $t = 1/2$ で最小値となり，また $t = 1/2$ から左または右に離れるにしたがって大きくなる。$t = 1/2$ のとき $1 = A = B$ なので，S の最小値は 2σ である。よって (b) が示された。

Q.E.D

Ⅲ　Scarfの解と他の解との比較

Scarf (1958) は，与えられた期待値と標準偏差の下で，想定される最悪の確率分布の下で最善の在庫量を選ぶという Min-Max 選択の在庫量を示した。本稿では，これを Scarf の解と呼び a^S と記す。次の (16) で示される。$t = c/p$ である。Scarf の解は (16) に示されるように簡単に計算できるので，その点でも実用性がある。

$$\text{基本モデルのScarfの解}\quad a^S = \mu + \sigma\frac{1-2t}{2\sqrt{t(1-t)}} = \mu + \sigma\frac{1-2c/p}{2\sqrt{c/p(1-c/p)}} = \mu + \sigma\frac{p-2c}{2\sqrt{c(p-c)}} \tag{16}$$

Scarf の解 a^S は (8) (14) の下限と上限の平均値に一致する。これは興味深い一致といえる。このことは Yue, Chen and Wang (2006) やその他の研究が指摘している。本稿の新聞売り子問題の他のモデルにおいても，そのときの最大化条件の右辺を t とすると (16) の a^S の式が得られる。ただし，そのときの a^S が，Scarf (1958) のいう，与えられた期待値と標準偏差の下で想定される，最悪の確率分布の下での最善の在庫量である Min-Max 選択の在庫量であるか否かは不明である。

図 1 は横軸に $t = c/p$，縦軸に a^L, a^R とその平均である Scarf の解 a^S をとったグラフである。需要量の期待値を $\mu = 50$，標準偏差を $\sigma = 4$ としている。命題 1 と性質 1 で示された内容が読み取れる。また需要量の確率分布が正規分布で，そのことが既知として得た解を a^N，確率分布が一様分布で，そのことが既知として得た解を a^U として，これらのグラフも示している。a^N と a^U は，最大化条件の (5) の左辺の確率分布を正規分布および一様分布として得ている。a^U のグラフは直線になる。μ と σ が与えられると，どれも $t = c/p$ のみの関数となる。$0 \leq t \leq 0.95$ の範囲で 0.05 刻みで計算して，それをグラフのマーカーと

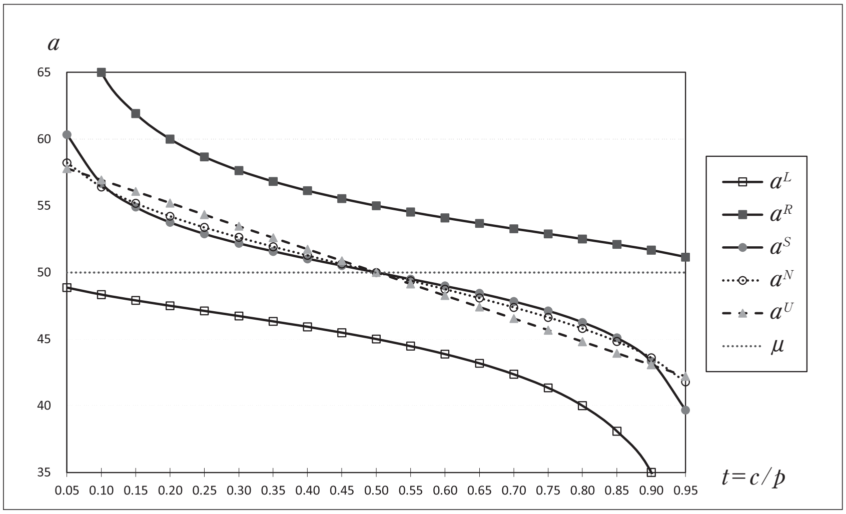

図１　$t=c/p$ と各種の解 a^L, a^R, a^S, a^N, a^U

横軸のメモリで示している。

図１から分かるように，a^N, a^U, a^S の３者は互いに近い値を取り，$t=0.5$ で全て μ となる。t が μ より左へ離れてゆくと，しばらく $a^S<a^N<a^U$ だが，$t=0.118$ で a^S と a^N は交わり大小関係が入れ替わる。$t=0.092$ で a^S と a^U は大小関係が入れ替わり，$t=0.067$ で a^N と a^U は大小関係が入れ替わる。t が μ より右へ離れてゆくと，しばらく $a^U<a^N<a^S$ だが，$t=0.882$ で a^S と a^N は大小関係が入れ替わり，$t=0.908$ で a^S と a^U は大小関係が入れ替わる。$t=0.933$ で a^N と a^U は大小関係が入れ替わる。

このように $t=0.5$ から大きく離れないところでは，左右ともScarfの解は２つの分布の解よりも μ に近く，一様分布の解よりも正規分布の解に近く，$t=0.5$ から大きく離れて０または１にかなり近づくと，Scarfの解は２つの分布の解から離れていく。

Ⅳ　Scarfの解の頑強性の意味

上でScarfの解が，a^* が取り得る範囲である（8）の下限と上限の平均値に一致することを述べた。Yue, Chen and Wang（2006）はこのことをRobust（頑強な）と呼んだが，その具体的な意味については論じていない。ここではこのRobustの意味を考察する。ベイズ統計学的な観点から a^* がある確率分布にしたがうと考える。

θ をあるパラメータとし，ある確率分布にしたがうとする。θ の推定値を q とし解の損失関数を $L(\theta, q)$ とする。損失関数 $L(\theta, q)$ が以下のように設定されたとき，θ の分布の形状に関係なく，その期待値を最小化する q はそれぞれ次で示される[4)]。

1）$L(\theta, q)$ が絶対損失関数：$|\theta-q|$ のとき，その期待値が最小化されるのは「$q=\theta$ の中央値」のときである。

2）$L(\theta, q)$ が平方損失関数：$(\theta-q)^2$ のとき，その期待値が最小化されるのは「$q=\theta$ の期待値」のときである。

もし θ がある範囲の下限と上限の平均値を中心に対称的に分布しているとすると，θ の確率分布の形状に関係なく，その平均値は θ の中央値かつ期待値となる。よって，平均値を推定値とすると，上述のよ

うに絶対損失関数と平方損失関数を最小化する。

今 θ を a^* とし，a^* が対称的に分布しているとすると，(8) の下限と上限の平均値であるScarfの解は中央値かつ期待値となり，a^* の分布の形状に関係なく，上の2つのタイプの損失関数の期待値を最小化することになる。また a^* の分布が厳密に対称的でなくても，それに近ければ，Scarfの解は θ の中央値かつ期待値に近くなり，Scarfの解を推定値とすると，絶対損失関数と平方損失関数を最小化する値に近くなる。このことを一つのRobustと呼ぶことができよう。

一方，最大利益，つまり最適解 a^* がもたらす期待利益：$ER^* = ER(a^*)$ と予測値 a に基づく期待利益：$ER = ER(a)$ の差は，解の損失関数よりも企業の利益に直結するが，この期待利益の差が近似的に解の平方損失関数 $(a - a^*)^2$ に比例することを示す。まず2つの期待利益の差 $ER^* - ER = ER(a^*) - ER(a)$ について次のレンマを示す。

〈レンマ1〉

任意の a に対して次が成立する。

$$ER^* - ER = ER(a^*) - ER(a) = p\left(\int_0^{a*}(x-a)f(x)dx - \int_0^{a}(x-a)f(x)dx\right) \tag{17}$$

（証明）

まず $a \leq a^*$ の場合を考える。(2) と (6) から次が得られる。

$$\begin{aligned} ER^* - ER &= p\int_0^{a*}xf(x)dx - \left(p\int_0^{a}xf(x)dx + p\int_a^{\infty}af(x)dx - ca\right) \\ &= p\left(\int_a^{a*}xf(x)dx - \left(\int_a^{\infty}f(x)dx - \frac{c}{p}\right)a\right) \\ &= p\left(\int_a^{a*}xf(x)dx - \left(\int_a^{\infty}f(x)dx - \int_{a*}^{\infty}f(x)dx\right)a\right) \\ &= p\left(\int_a^{a*}xf(x)dx - a\int_a^{a*}f(x)dx\right) \\ &= p\int_a^{a*}(x-a)f(x)dx \\ &= p\left(\int_0^{a*}(x-a)f(x)dx - \int_0^{a}(x-a)f(x)dx\right) \end{aligned} \tag{18}$$

$a^* < a$ の場合も同じ式が同様に計算される。よっていずれの場合も $ER^* - ER$ は (17) で表わされる。

Q.E.D

$g(a)=(ER(a^*) - ER(a))/p$ とおくと次が成立する。

$$g(a) = \int_0^{a*}(x-a)f(x)dx - \int_0^{a}(x-a)f(x)dx \tag{19}$$

a^* を定点としたテイラー展開により，任意の a について次の式が成立する。$R(3)$ を3次の剰余項，つまり $R(3)= (a - a^*)^3 g'''(\tilde{a}) /3!$ とし，$\tilde{a}= a^* + \theta(a - a^*)$，$0 < \theta < 1$ とすると次を得る。

$$g(a)=g(a^*)+(a-a^*)g'(a^*)+(a-a^*)^2g''(a^*)/2+R(3) \tag{20}$$

(19) の $g(a)$ を微分すれば次を得る。

$$g'(a)=-\int_0^{a^*}f(x)dx-(a-a)f(a)+\int_0^{a}f(x)dx=-\int_0^{a^*}f(x)dx+\int_0^{a}f(x)dx \tag{21}$$

これより $g(a^*)=0$, $g'(a^*)=0$, $g''(a)=f(a)$, $g''(a^*)=f(a^*)$ を得る。これらを (20) に代入すると次を得る。

$$g(a)=(a-a^*)^2f(a^*)/2+R(3)\geq 0 \tag{22}$$

(22) において剰余項を省略すると次を得る。

$$ER(a^*)-ER(a)=p(a-a^*)^2f(a^*)/2 \tag{23}$$

この式が示すように，3 次の剰余項を省略すると，$f(a^*)>0$ ならば，$ER(a^*)-ER(a)$ は $(a-a^*)^2$ に比例し，後者を小さくすれば，前者が小さくなることが分かる。

最適解 a^* とその予測値 a がもたらす期待利益の乖離はより企業の利益に直結するが，(23) が示すように期待利益の乖離は近似的に予測値 a の平方損失関数に比例するので，a の平方損失関数の最小化は期待利益の乖離の最小化を意味することになる。以上のことは，企業が損失関数として平方損失を選ぶべき根拠を示す。そして上述の条件の下でScarfの解は絶対損失とともに平方損失を最小化する。このような点からScarf の解は選択されるべき在庫量としてRobust といえる。

V　新聞売り子問題の一般化と最適解 a^* の範囲

Iの新聞売り子の基本モデルに，売れ残り分: $a-x$ に対する単価であるサルベージ価格 s と売り切れ分: $x-a$ に対するペナルティ費用の単価であるペナルテイ価格 v を加え，これを一般モデルとして最適解 a^* の範囲を考える。このモデルの期待利益は次の ER^G となる。基本モデルの (1) に相当する式は省略する。

$$ER^G=ER^G(a)=\int_0^a\big(px+s(a-x)\big)f(x)\,dx+\int_a^\infty\big(pa-v(x-a)\big)f(x)\,dx-ca \tag{24}$$

これを微分して 0 とおき，次の最大化条件を得る。

$$dER^G/da=s\int_0^a f(x)\,dx+(p+v)\int_a^\infty f(x)\,dx-c=0 \tag{25}$$

次に示すように 2 階の条件は満たされている。

$$d^2ER^G/d\,a^2=-(p-s+v)f(a)-c\leq 0 \tag{26}$$

(25) の最大化の条件は次のように変形される。

$$\int_{a^*}^\infty f(x)dx=\mathrm{P}(a^*\leq x)=(c-s)/(p-s+v)\qquad \text{最大化条件} \tag{27}$$

a^*の範囲を考える。命題1と同じ論法を使う。$k=\sqrt{(1-t)/t}$とおくと$1/(k^2+1)=t$である。これを(7)の右の不等式に代入して$t=(c-s)/(p-s+v)$とおくと次を得る。

$$\mathrm{P}(x \geq \mu+\sigma\sqrt{(p-c+v)/(c-s)}\,) < (c-s)/(p-s+v) \tag{28}$$

もし$a^* \geq \mu+\sigma\sqrt{(p-c+v)/(c-s)}$ならば$\mathrm{P}(x \geq a^*) < (c-s)/(p-s+v)$となり(27)の最大化条件を満たさない。よって$a^* < \mu+\sigma\sqrt{(p-c+v)/(c-s)}$を得る。次に$k=\sqrt{t/(1-t)}$とおくと$k^2/(k^2+1)=t$である。これを命題1の(11)に代入し$t=(c-s)/(p-s+v)$とおくと次を得る。

$$\mathrm{P}(x > \mu-\sigma\sqrt{(c-s)/(p-c+v)}\,) > (c-s)/(p-s+v) \tag{29}$$

もし$a^* \leq \mu-\sigma\sqrt{(c-s)/(p-c+v)}$ならば$\mathrm{P}(x \geq a^*) > (c-s)/(p-s+v)$となり(27)の最大化条件を満たさない。よって$a^* > \mu-\sigma\sqrt{(c-s)/(p-c+v)}$を得る。ここで得た$a^*$の範囲をまとめると次の命題2を得る。

〈命題2〉

任意の確率分布$f(x)$にしたがう需要量xに対して，s, vを含む一般モデルにおける最適解a^*は次の範囲に入る。

$$\mu-\sigma\sqrt{\frac{c-s}{p-c+v}} < a^* < \mu+\sigma\sqrt{\frac{p-c+v}{c-s}} \tag{30}$$

次に示すように$t=(c-s)/(p-s+v)$とおき，先と同様に(30)の両辺の平均値を一般モデルのScarfの解とする。

$$\text{一般モデルのScarfの解}\quad a^S = \mu+\sigma\frac{1-2t}{2\sqrt{t(1-t)}} = \mu+\sigma\frac{p+s+v-2c}{2\sqrt{(c-s)(p-c+v)}} \tag{31}$$

Ⅵ　複数財で資源制約下の最適解a_i^*の範囲とScarfの解

複数財(n財)で資源制約下の任意の確率分布にしたがう需要量に対する最適在庫量a_i^* ($i=1,\cdots,n$)の範囲とScarfの解を考える。資源としては，在庫スペースや財の購入資金などが考えられる。資源量全体をB，i財1単位当たりに必要な資源量(資源係数)をβ_iとする。この場合も解に関する不等式が1財の場合と同様に成立することを示す。i財の売上量をy_i，売値をp_i，仕入値をc_i，利益をR_i，在庫量をa_iとおく。サルベージ価格とペナルティ価格は考えない。需要量をx_iとして，その確率分布を$f_i(x_i)$，期待値をμ_i，標準偏差をσ_iとする。利益$R_i=R_i(x_i,a_i)$をx_iとa_iに対して次のように定義する。

$$R_i = R_i(x_i,a_i) = p_i y_i - c_i a_i \ \ (if\ x_i < a_i\ then\ y_i = x_i,\ \ if\ x_i \geq a_i\ then\ y_i = a_i\ )\ \ i=1,\cdots,n \tag{32}$$

上の利益$R_i(x_i,a_i)$の期待利益$ER(a_i)$が次のように計算される。

$$ER_i = ER_i(a_i) = \int_0^\infty R_i(x_i,a_i)f_i(x_i)dx_i = p_i\left(\int_0^{a_i} x_i f_i(x_i)dx_i + a_i\int_{a_i}^\infty f_i(x_i)dx_i\right) - c_i a_i \tag{33}$$

次で示されるように，全てのiについてのER_iの合計を資源制約下で最大化するa_iを見つける。

$$\operatorname*{Max}_{a_i}\ \sum_i ER_i = \sum_i ER_i(a_i) \qquad \text{s.t.}\ \sum_i \beta_i\, a_i \le B \tag{34}$$

λをラグランジェ変数として，ラグランジェ関数を次のように定義する。

$$L(a_i,\lambda) = \sum_i ER_i(a_i) + \lambda(B - \sum_i \beta_i a_i) \tag{35}$$

これをa_iとλで微分して0とおいて最大条件を得る。$a_i = 0$の場合解は自明なので$0 < a_i$の場合を考える。また資源制約が有効であるとして$0 < \lambda$とする。よって最大条件が次の等式で成り立つ。

$$\frac{\partial L}{\partial a_i} = \frac{\partial ER_i}{\partial a_i} - \lambda\beta_i = p_i \int_{a_i}^{\infty} f_i(x_i)dx_i - c_i - \lambda\beta_i = 0,\ B - \sum_i \beta_i a_i = 0 \tag{36}$$

$dL^2/da_i da_j = 0\ (i \neq j)$，$dL^2/da_i da_i = -p_i f_i(x_i) \le 0$より最大化の2階の条件が満たされる。$a_i^*$を解として最大化条件は次のように変形される。

$$\int_{a_i^*}^{\infty} f_i(x_i)dx_i = \mathrm{P}(a_i^* \le x) = (c_i + \lambda\beta_i)/p_i \qquad \text{最大化条件} \tag{37}$$

(37)の最大化条件の右辺$(c_i + \lambda\beta_i)/p_i$を$t_i$をすれば，命題1と同じ論法で解の範囲を示す(38)を得る。ここでは$0 < p_i - c_i - \lambda_i \beta_i$を仮定する。$0 < p_i - c_i - \lambda_i \beta_i$は$\lambda$が十分に小さいこと，または$B$が十分に大きいことを意味する。もし$B$が小さいと$0 > p_i - c_i - \lambda_i \beta_i$となって(38)の平方根内が負となり，新たにScarfの解の計算方法を考える必要があるが，ここではそれを考えない。

$k = \sqrt{(1-t_i)/t_i}$とおくと$1/(k^2+1) = t_i$である。これを(7)の右の不等式に代入して$t_i = (c_i + \lambda\beta_i)/p_i$とおく。$0 < p_i - c_i - \lambda_i \beta_i$より$0 < t_i = (c_i + \lambda\beta_i)/p_i < 1$となる。命題1)と同様の論法で，次の(38)の右の不等式を得る。次に$k = \sqrt{t_i/(1-t_i)}$とおくと$k^2/(k^2+1) = t_i$である。これを(10)に代入して$t_i = (c_i + \lambda\beta_i)/p_i$とおくと(38)の左の不等式を得る。左辺を$a_i^L$，右辺を$a_i^R$とおく。

$$a_i^L = \mu_i - \sigma_i \sqrt{\frac{c_i + \beta_i\lambda}{p_i - c_i - \beta_i\lambda}} < a_i^* < \mu_i + \sigma_i \sqrt{\frac{p_i - c_i - \beta_i\lambda}{c_i + \beta_i\lambda}} = a_i^R \tag{38}$$

ここでは記さないが，この式で$t_i = (c_i + \lambda\beta_i)/p_i$とすると(14)で各変数に添え字の$i$がついた不等式が成立する。$a_i^S$をScarfの解として$a_i^S = (a_i^L + a_i^U)/2$とすると(38)より次を得る。

$$\begin{aligned} a_i^S &= \mu_i + \sigma_i/2\left(-\sqrt{\frac{c_i + \beta_i\lambda}{p_i - c_i - \beta_i\lambda}} + \sqrt{\frac{p_i - c_i - \beta_i\lambda}{c_i + \beta_i\lambda}}\right) \\ &= \mu_i + \sigma_i/2\left(-\sqrt{\frac{p_i}{p_i - c_i - \beta_i\lambda} - 1} + \sqrt{\frac{p_i}{c_i + \beta_i\lambda} - 1}\right) \end{aligned} \tag{39}$$

確率分布が未知ならば(36)(37)からはλの値が得られず，a_i^Lとa_i^Uの値も得られない。よってその平均値であるScarfの解も得られない。ところが，Scarfの解は次の方法で得られる。λの値が資源制約を満たすことを利用する。つまり資源の全使用量を$UsedB$とすると$UsedB = \sum_i \beta_i\, a_i^S$であるが，$\lambda$の値にお

いてこの $UsedB$ と所与資源量 B が等しくなることを利用する。つまり λ の値は次の (40) を成立させる必要がある。a_i^s は (39) より p_i, c_i, β_i, μ_i, σ_i と λ から計算される。

$$\sum_i \beta_i\, a_i^s = UsedB = B \tag{40}$$

a_i^L と a_i^U とも λ の強い減少 (狭義の単調減少) 関数なので $UsedB$ も λ の強い減少関数であり，上の式を等号で満足する λ が一意的に存在し，その λ を計算できれば (39) のScarfの解 a_i^s が得られる。

確率分布が既知の場合，(36) から正確な a_i^* と λ が得られるが，その際，積分などの計算を要する場合がある。しかし，上の方法を用いると，所与の p_i, c_i, β_i, μ_i, σ_i, B に対して平方根などの比較的簡単な計算で λ と a_i^s を得ることができる。このように，複数財で資源制約下の場合も比較的簡単な方法でScarfの解 a_i^s を求められる。その意味でもScarfの解は有効であるといえる。

ただし，解析的に λ を得るのは難しいので，数値計算で得ることが考えられる。具体的には，λ を変化させていき (40) を満たす λ の値を見つけるプログラムを組むか，他にExcelソルバーの目標値指定機能を利用する方法も考えられる。その際 $0 > p_i - c_i - \lambda_i \beta_i$ の場合も考えることになる。

＜複数財で資源制約下での一般モデル＞

複数財 (n 財) で資源制約下の一般モデルの a_i^* の範囲とScarfの解についても確認しておく。次の (41) のように (24) の ER^G に添え字 i を付けた式を ER_i^G とおき，その n 財分の合計を (34) と同じ資源制約下で最大化する。

$$ER_i^G = ER_i^G(a_i) = \int_0^{a_i} (p_i x_i + s_i(a_i - x_i)) f_i(x_i) dx_i + \int_{a_i}^{\infty} (p_i a_i - v_i(x_i - a_i)) f_i(x_i) dx_i - c_i a_i \tag{41}$$

最大化の手順はこれまでと同様なので省略する。最大化条件は次になる。2 階の条件は満たされる。

$$\int_{a_i^*}^{\infty} f_i(x_i) dx_i = \mathrm{P}(a_i^* \le x) = (c_i - s_i + \lambda\beta_i)/(p_i - s_i + v_i) \qquad \text{最大化条件} \tag{42}$$

命題 1) と同様の論法で (42) の右辺を t_i とおくと a_i^* の範囲は次になる。Scarfの解は両辺の平均となる。

$$\mu_i - \sigma_i \sqrt{\frac{c_i - s_i + \beta_i\lambda}{p_i - c_i + v_i - \beta_i\lambda}} < a_i^* < \mu_i + \sigma_i \sqrt{\frac{p_i - c_i + v_i - \beta_i\lambda}{c_i - s_i + \beta_i\lambda}} \tag{43}$$

むすびに

需要量の期待値と標準偏差は観測データから推定できるが，確率分布は未知ということはよくあり，むしろ通常の状況ともいえる。したがって，本稿で分析した，需要量の期待値と標準偏差から需要量の確率分布が未知の場合の最適在庫量の範囲を得ること，かつその下限と上限の平均値であるScarfの解が最適在庫の有力な候補となることは重要な意味がある。また本稿ではその解が頑強 (Robust) である根拠を示した。

過去の研究では，最適な在庫量の解の範囲の証明が大変複雑である。本稿は，解の範囲を片側のチェビシェフの不等式を使って簡潔に示し，同じ論法でより一般化したモデルの解の範囲も示した。さらに複数財で資源制約下でのモデルにおいて，需要量の確率分布が未知であってもラグランジェ乗数を計算し，解の範囲を得られることを示した。

ただし，解の範囲の上限と下限の式の平方根が負になる場合については解法を示していない。また最適在庫量に関して具体的な数値計算を行うことで実践性が実現されるといえる。それらを今後の課題としたい。

付録１　新聞売り子問題の期待費用の最小化と期待利益の最大化が同値であることの確認

新聞売り子問題の期待費用の最小化と期待利益の最大化が同値であることを示す。期待費用はYue, Chen and Wang (2006) のp1128などを参考にしているが，ここではペナルティ価格を追加している。期待利益は本文の一般モデルのそれである。

期待費用$EC = EC(a)$を下記の（A1）のように定義する。右辺の第１項の係数 $(c - s)$ は仕入価格からサルベージ価格を引いた値だが，これは売れ残り（過剰在庫）のときに在庫１単位に対して発生する単位費用である。第２項の係数 $(p - c + v)$ は販売価格から仕入価格を引いた値にペナルティ価格を足したもので，売切れ（過少在庫）のときに発生する機会費用であり，もし在庫があれば１単位売るごとに得られる利益と失われない費用（ペナルティ価格）の和である。

$$EC(a) = (c-s)\int_0^a (a-x)f(x)dx + (p-c+v)\int_a^\infty (x-a)f(x)dx \tag{A1}$$

期待利益$ER^G = ER^G(a)$は本文の (24) で示した次の式である。

$$ER^G(a) = \int_0^a \big(px + s(a-x)\big)f(x)dx + \int_a^\infty \big(pa - v(x-a)\big)f(x)dx - ca \tag{A2}$$

ここで $(p - c)\,\mu = ER^G(a) + EC(a)$ が成り立てば，期待利益の最大化と期待費用の最小化は一致することになる。この式が成立することを示す。

$$ER^G(a) = p\int_0^a xf(x)dx + s\int_0^a (a-x)f(x)dx + p\int_a^\infty af(x)dx - v\int_a^\infty (x-a)f(x)dx - ca \tag{A3}$$

$$= p(\mu - \int_a^\infty xf(x)dx) + s\int_0^a (a-x)f(x)dx + p\int_a^\infty af(x)dx - v\int_a^\infty (x-a)f(x)dx - ca + cu - cu$$

$$= p\,\mu + s\int_0^a (a-x)f(x)dx + p\int_a^\infty (a-x)f(x)dx - v\int_a^\infty (x-a)f(x)dx$$

$$-c(\int_0^a af(x)dx + \int_a^\infty af(x)dx - \int_0^a xf(x)dx - \int_a^\infty xf(x)dx) - cu$$

$$= p\mu - ((c-s)\int_0^a (a-x)f(x)dx + (p-c+v)\int_a^\infty (x-a)f(x)dx) - cu$$

ゆえに $(p - c)\,\mu = ER^G(a) + EC(a)$ が得られ，２つの問題が同値であることが示された。

付録２　マルコフの不等式と片側のチェビシェフの不等式が強不等号で成立する根拠

チェビシェフの不等式（両側と片側）において両辺の関係を示す不等号は，通常，弱不等号（≤）になっている。それに対して本稿では強不等号（<）として利用する。よって，ここでは強不等号で成立する根拠を示す。まずマルコフの不等式が強不等号で成立する根拠から説明する。

１）マルコフの不等式において「<」（強不等号）が成立する根拠。

通常，マルコフの不等式の証明は次のように示される。aを任意の正の値，xを非負の任意の連続的な確率変数として確率分布$f(x)$に従うとすると，次が成立する。

$$E(x) = \int_0^\infty xf(x)\,dx$$

$$\geq \int_a^\infty xf(x)dx \qquad \text{被積分関数が非負かつ積分範囲が狭くなったので} \qquad \text{(B1)}$$

$$\geq a\int_a^\infty f(x)dx \qquad a \leq x\text{なので} \qquad \text{(B2)}$$

$$= a\,\mathrm{P}(a \leq x) \qquad \therefore\quad \mathrm{P}(a \leq x) \leq \frac{E(x)}{a} \qquad \text{(B3)}$$

さて，xが連続的な確率変数の場合$x = a$の以外の領域で$f(x) > 0$の範囲がある。よって次のⅰ）あるいはⅱ）の少なくともどちらかが成り立つはずである。

ⅰ）$a > x$の領域で$f(x) > 0$の範囲がある。このとき（B1）が「>」で成立する。

ⅱ）$a < x$の領域で$f(x) > 0$の範囲がある。このとき（B2）が「>」で成立する。

よって不等式は「<」で成立する。つまり次の（B4）が成立する。

$$\mathrm{P}(a \leq x) < \frac{E(x)}{a} \qquad \text{(B4)}$$

２）「<」が成立する片側のチェビシェフの不等式

ある任意の正の値$a > 0$と任意の連続的な確率変数yについて，それらを２乗した$a^2 > 0$と$y^2 \geq 0$を上で得た（B4）に適用すると次が成り立つ。

$$\mathrm{P}(a \leq y) \leq \mathrm{P}(a^2 \leq y^2) < E(y^2)/a^2 \qquad \therefore\ \mathrm{P}(a \leq y) < E(y^2)/a^2 \qquad \text{(B5)}$$

$$\mathrm{P}(y \leq -a) \leq \mathrm{P}(a^2 \leq y^2) < E(y^2)/a^2 \qquad \therefore\ \mathrm{P}(y \leq -a) < E(y^2)/a^2 \qquad \text{(B6)}$$

まず本文の（7）の片側のチェビシェフの不等式の右側の不等式を示す。xを任意の連続的な確率分布としμをその期待値，σ^2をその分散とし，$y = x - u - c$，$t > 0$，$c = \sigma^2/t$，$a = t + c > 0$とおき上の（B5）に代入すると次を得る。

$$\mathrm{P}(t \leq x-u) = \mathrm{P}(t + c \leq x-u + c) < \frac{E(x-u+c)^2}{(t+c)^2} = \frac{\sigma^2+c^2}{(t+c)^2} = \frac{\sigma^2+\sigma^4/t^2}{(t+\sigma^2/t)^2} = \frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2} \qquad \text{(B7)}$$

$\therefore\quad \mathrm{P}(t \leq x-u) \leq \frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2}$　ここで$t = k\sigma$（$k > 0$）とおくと$\mathrm{P}(k\sigma \leq x-u) < \frac{1}{k^2+1}$を得る。

次に（7）の左の不等式を示す。上の（B6）で先と同様におきかえると次を得る。

$$\mathrm{P}(x-u \leq -t) = \mathrm{P}(x-u-c \leq -(t+c)) < \frac{E(x-u-c)^2}{(t+c)^2} = \frac{\sigma^2+c^2}{(t+c)^2} = \frac{\sigma^2+\sigma^4/t^2}{(t+\sigma^2/t)^2} = \frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2} \qquad \text{(B8)}$$

$\therefore\quad \mathrm{P}(x-u \leq -t) < \frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2}$　ここで$t = k\sigma$（$k > 0$）とおくと$\mathrm{P}(x-u \leq -k\sigma) < \frac{1}{k^2+1}$を得る。

まとめると，次のように（7）の左右の不等式が成り立つ。

$$\mathrm{P}(x-u \leq -k\sigma) < \frac{1}{k^2+1},\quad \mathrm{P}(x-u \geq k\sigma) < \frac{1}{k^2+1} \tag{B9}$$

注

1）Yue, Chen and Wang（2006）の pp. 1128-1130 に記述がある。1991 年の Gallego の論文とは G. Gallego, "The distribution-free newsboy problem: Review and extensions," Working paper, 1991, Columbia University, New York. である。ただし，この論文そのものは Working Paper であり筆者は入手できなかった。したがって参考文献には入れていない。なお 1991 年の Gallego の論文と Yue, Chen and Wang（2006）で示された最適解の範囲に関する不等式は弱不等号「≦」であるが，本稿では強不等号「<」で成立することを示している。

2）宮川（1979）の pp. 63-64 では片側のチェビシェフの不等式を利用して，最適在庫の問題を議論している。ただし，そこではチェビシェフの不等式を使って期待総費用の計算を行っており，ここでの議論とは異なる。ただし，そこでの議論が本稿の片側のチェビシェフの不等式を利用した分析のヒントとなっている。なお，宮川（1979）ではチェビシェフの片側不等式が強不等号「<」で成立するとしているが，証明は省略されている。

3）本稿では（8）の左辺と右辺が a^* が取り得る範囲の下界と上界の一つであることは示したが，数学的に厳密な意味で左辺と右辺が範囲の下限（下界の最大値）と上限（上界の最小値）であることは示していない。いいかえれば，a^* が取り得る範囲がこれ以上絞り込めるか否かの問題が残る。それに対して，Yue（2012）は a^* が（8）の左辺と右辺の間の任意の値をとり得るとして，そのことを "tight" と表現している。本稿のⅣの頑強性に関する議論では，a^* の分布が "tight" であることを前提としている部分がある。

4）涌井義幸・涌井貞美（2010）の pp. 218-219 を参照。損失関数は他にも考えられる。

参考文献

青木博明（2017）「新聞売り子問題の期待利潤の性質」『阪南論集　社会科学編』第 52 巻第 2 号，103-112 ページ。

宮川公男（1979）『オペレーションズ・リサーチ』春秋社。

涌井義幸・涌井貞美（2010）『Excel でスッキリわかるベイズ統計入門』日本実業出版社。

G. Gallego and I. Moon, "The Distribution Free Newsboy Problem: Review and Extensions," Operations Research Society, Vol. 44, 1993, pp. 825-834.

G. Hadley and T. Whitin, "Analysis of Inventory Systems," Prentice-Hall, New Jersey, 1963.

I. Moon and G. Gallego, "Distribution Free Procedures for Some Inventory Models," Operations Research Society, Vol. 45, 1994, pp. 651-658.

H. A. Scarf, "A Min-Max Solution of an Inventory Problem," In: K. J. Arrow, S. Karlin and H. E. Scarf, Eds., Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford University Press, California, 1958, pp. 201-209.

J. Yue, "A New Proof for the Tight Range of Optimal Order Quantities for the Newsboy Problem with Mean and Standard Deviation," American Journal of Operations Research, Vol. 2, No. 2, 2012, pp. 203-206.

J. Yue, B. Chen and M. C. Wang, "Expected Value of Distribution Information for the Newsvendor Problem," Operations Research, Vol. 54, No. 6, 2006, pp. 1128-1136.

（2023 年 11 月 17 日掲載決定）