

〔論 文〕

大域と局所と実と虚から見える 特異点と数学の世界

松 田 健

要 旨

本稿では、特異点の理論に関する話題について複素数と実数で考える場合の違いや大域と局所から見えるものの違いとそれらの考慮を不要とする手法の発見について述べる。また、数学史の観点から数学の発展とその応用としての現代科学の課題について考察する。

キーワード：特異点, log canonical, jet scheme

1. 導入

広中の定理により、標数 0 上の代数多様体は非特異代数多様体と双有理同値である。これは特異点を解消する写像が必ず存在することを保証するものであるが、一般的にそのような写像を実際に見つけることは困難であることが知られている。本稿では、実数と複素数、局所と大域というキーワードを中心に特異点に関するいくつかの結果とそれらの性質について紹介する。

まず、特異点の定義を述べる。 k を体とし、 k を係数とする多項式の集合 $k[x_1, \dots, x_d]$ を考える。 $k[x_1, \dots, x_d]$ は多項式環である。 $f_1, \dots, f_r \in k[X]$ をとり、連立多項式

$$f_1 = 0, \dots, f_r = 0$$

の解の集合を考える。この連立多項式の解集合は代数的集合と呼ばれ、

$$V = V(f_1, \dots, f_r) = \{P \in k^n \mid f_1(P) = 0, \dots, f_r(P) = 0\}$$

と定義する。代数的集合 V に対して、多項式からなる集合

$$I(V) = \{h \in k[X] \mid h(P) = 0, P \in V\}$$

を考える。 $I(V)$ を生成するイデアルが

$$I(V) = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$$

であるとき、ヤコビ行列 $J(P)$ は以下の性質をもつ。

$$J(P) = \text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_s}{\partial x_d} \end{bmatrix} \leq d - s$$

ヤコビ行列のランクが落ちる点 P を特異点という。

本稿では、実数の世界から見た特異点と複素数の世界から見た特異点の違いについて考える。上述の通り、特異点は代数的集合の点であることが分かる。このような点は解析関数の零点でも良く、その場

合はテーラー展開により多項式で表現する代数化を考えればよい。 $k = \mathbf{C}$ (複素数) の場合は、代数学の基本定理より、 n 次方程式の解は必ず n 個の複素数で与えられることが知られている。したがって、複素数を係数とする多項式による代数的集合を考えると、それが空集合になることを考える必要はない。しかしながら、 $k = \mathbf{R}$ (実数) の場合は、代数的集合が空集合になるものは無限 (非加算無限個) に存在する。最も単純な例は $f(x) = x^2 + 1$ である。一方で、実数の世界での特異点を持つ代数的集合も無限に存在する。実数の特異点を考える場合は対象が具体的であることが望ましく、複素数の場合はより一般的に考えられることになる。ここまでのことは高校数学の範疇でも考えられることであるが、ここからは特異点の性質を解析するために調べられる、特異点解消によって得られることに対する実数と虚数の世界での違いを紹介する。そのために、スキーム理論の文脈を用いて必要な用語を定義する。

2. 複素数と実数での特異点の違い

$k[x_1, \dots, x_d]$ のすべての素イデアルの集合を $\text{Spec } k[x_1, \dots, x_d]$ とする。

Smooth な $X = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_d]$ の標準束 K_X に対してある整数 m が存在して $m \cdot K_X$ が Cartier 因子になるものを考え、 Y を X の閉部分スキームとする。特に、 $Y \neq X$ とする。

$$\pi: X' \rightarrow X$$

が固有写像かつ双有理写像であり、 X' は smooth かつ π による引き戻し $\pi^*Y = D$ が effective 因子かつ π の例外因子 $E_X(\pi)$ に対して $D \cup E_X(\pi)$ が simple normal crossing であるとき、 π は log resolution であるという。このような写像は Blow up と呼ばれる以下のような手続きで得ることができる。

$$k^n \times \mathbf{P}^{n-1} \rightarrow k^{2n-1} \rightarrow k^n \cdots (1)$$

$$(x_1, \dots, x_d; y_1: \dots: y_d) \rightarrow (x_1, \dots, x_d, y_2, \dots, y_d) \rightarrow (x_1, y_2, \dots, y_d)$$

(1) では $y_1 = 1$ とした場合の具体的な写像の例を示している。 \mathbf{P}^{n-1} は n 次元射影空間である。具体的な計算例は後で紹介する。特異点解消の写像を見つけないことができるとすると、特異点对 (X, Y) に対して log resolution

$$\pi: X' \rightarrow X$$

があって、

$$\begin{aligned} K_{X'/X} - \tau \cdot D &= \sum_{i=1}^m p_i E_i - \tau \sum_{i=1}^m a_i E_i \\ &= \sum_{i=1}^m (p_i - \tau a_i) E_i \end{aligned}$$

となる。このとき、 $p_i - \tau a_i \geq -1$ が成り立つならば特異点对 $(X, \tau Y)$ は log canonical といい、

$$\tau = \frac{p_i + 1}{a_i}$$

を log canonical threshold (lct) という。複素数上の特異点では τ の値が 1 以下であることに意味を持ち、この値が 0 に近ければ近いほど悪い特異点であるという意味を持つ。この特異点の悪さは、

$$f(x, y) = x^2 + y^3,$$

$$g(x, y) = x^2 + y^5,$$

で定義される代数多様体の原点における特異点の lct を用いて考察することができる。 $f(x, y) = 0$ の原点における特異点解消から得られる lct を τ_f 、 $g(x, y) = 0$ の原点における特異点解消から得られる lct を τ_g とそれぞれ定義すると、

Aug. 2024

大域と局所と実と虚から見える特異点と数学の世界

$$\tau_f = \frac{3}{4}, \tau_g = \frac{7}{10}$$

となり,

$$\tau_g < \tau_f < 1$$

であることが分かる。一般的に、超曲面の特異点の悪さはその点における重複度で測ることができる。

$f(x, y) = 0$ と $g(x, y) = 0$ は共に原点に特異点をもつが、 $g(x, y) = 0$ の特異点の方が原点における重複度が高いことは多項式の y の次数の違いからも理解できるし、この違いにより特異点解消を得るために $g(x, y)$ の方が blow up の回数も多く必要であることが特異点の悪さの表現に繋がることを直感的に理解することができる。しかしながら、実数上の特異点を考えるとき、1 以上の値をとる τ が意味を成す場合が現れる。というのは、上述の $f(x, y)$ と $g(x, y)$ の特異点は実数の場合でも τ の値は 1 以下である。実際、

$$h(x, y, z, s, t) = x^2y^4 + x^2z^4 + x^2y^2z^2 + s^2 + t^2$$

において、代数的集合

$$V(h) = \{P \in \mathbf{R}^5 | h(x, y, z, s, t) = 0\}$$

を考えると、この超曲面の原点の特異点からは

$$\tau_h = \frac{3}{2}$$

が得られる。一般的に、実代数多様体と複素代数多様体では上記のような一つの既約多項式で定義される代数多様体であっても考える対象が異なっているように思える。本稿で冒頭において特異点解消の写像を得る困難さについて紹介したが、この点について局所と大域という観点から考えることができる例を用いて考察する。

3. 局所と大域

ここでは、複数の既約多項式の和の形で与えられる既約多項式を考える。まず、実数上の超曲面

$$V(f) = \{P \in \mathbf{R}^4 | f(x, y, z, w) = (xy + zw)^2 + (xy^3 + zw^3)^2 = 0\}$$

を考える。 $V(f)$ は原点に特異点をもつことは容易に確認することができるが、blow up を繰り返すことで原点ではないところに特異点が出現する。また、 $V(f)$ はある双曲線正接関数 ($\tanh(x)$) の原点におけるテーラー展開で得られる無限個の基底に対して、ヒルベルトの基底定理より有限個の多項式で生成されることに基いて得られているものに対応することに注意しておく。このように超曲面の特異点を考えるときには、一つ一つの作業は局所的に考えているが、それと同時に大域的に情報を探さなければいけないということになる。 $V(f)$ の特異点解消を得るために部分多様体

$$\{y = 0, w = 0\}$$

による Blow up を構成する。実数体 \mathbf{R} と多項式環 $\mathbf{R}[y, w]$ を考える。

$$U' = \text{Spec } \mathbf{R}[y', w']$$

$$U'' = \text{Spec } \mathbf{R}[y'', w'']$$

とおき、

$$\varphi': \mathbf{R}[y, w] \rightarrow \mathbf{R}[y', w']$$

$$\varphi'': \mathbf{R}[y, w] \rightarrow \mathbf{R}[y'', w'']$$

を考える。ただし、

$$\varphi'(y) = y', \varphi'(w) = y'w'$$

$$\varphi''(y) = y''w'', \varphi''(w) = w''$$

と定義すると, φ' から開集合間の同型写像

$$U'_y = \text{Spec } \mathbf{R}[y', w', z'^{-1}] \cong \text{Spec } \mathbf{R}[y, w, z^{-1}] = U_y$$

が得られる。ただし, U'_y において $y' \neq 0$ であり, U_y において $y \neq 0$ である開集合上のものを考える。同様に, φ'' から

$$U''_w = \text{Spec } \mathbf{R}[y'', w'', w''^{-1}] \cong \text{Spec } \mathbf{R}[y, w, w^{-1}] = U_w$$

が得られる。ここで, $y \neq 0, w \neq 0$ として

$$U_{yw} = U_y \cap U_w = \text{Spec } \mathbf{R}[y, w, y^{-1}, w^{-1}]$$

とおくことで, 同型写像

$$U'_{yw} = \text{Spec } \mathbf{R}[y', w', y'^{-1}, w'^{-1}] \cong \text{Spec } \mathbf{R}[y'', w'', y''^{-1}, w''^{-1}] = U''_{yw}$$

が得られ, 2つの開集合 U', U'' に対して

$$U'_{yw} \subset U'$$

$$U''_{yw} \subset U''$$

で貼り合わせができて

$$U' \cup U'' = \text{Spec } \mathbf{R}[y', w'] \cup \text{Spec } \mathbf{R}[y'', w'']$$

が得られる。具体的には, 同型写像

$$U'_{yw} = \text{Spec } \mathbf{R}[y', w', y'^{-1}, w'^{-1}] \cong \text{Spec } \mathbf{R}[y'', w'', y''^{-1}, w''^{-1}] = U''_{yw}$$

から,

$$\mathbf{R}[y', w', y'^{-1}, w'^{-1}] \rightarrow \mathbf{R}[y'', w'', y''^{-1}, w''^{-1}]$$

において,

$$y' = y'' w'', w' = w''^{-1}$$

とすれば良い。実際, このように定義することで,

$$y' = y'' w''$$

$$y' w' = w''$$

より,

$$w' = \frac{w''}{y'} = \frac{w''}{y'' w''} = \frac{1}{y''}$$

が得られ, この部分がBlow upの射影空間の式に対応することが分かる。この変換を

$$(xy + zw)^2 + (xy^3 + zw^3)^2 = 0$$

に適用する。表記を簡単にするため y は y のまま, w は yw' と変換する。

このとき, $w \neq 0$ 上で,

$$(xy + zw)^2 + (xy^3 + zw^3)^2 = y^2 \{(x + zw')^2 + y^4(x + zw'^3)^2\} = 0$$

が得られる。この方程式から, 例外因子は $\{y = 0, w = 0\}$ で与えられ, この変換により局所座標での代数多様体の方程式は $\{(x + zw')^2 + y^4(x + zw'^3)^2 = 0, w = yw'\}$ で与えられることが分かる。このBlow upの写像では正規交差になっていないことが分かるだけでなく, $x' = x + zw'$ という変換(ヤコビアンは定数)によって, 原点以外の特異点も見つけることができる。 $y \neq 0$ 上での計算は省略する。上述の計算を繰り返すことにより,

$$f(x, y, z, w) = (xy + zw)^2 + (xy^3 + zw^3)^2 = 0$$

のlctは

$$\tau_f = \frac{2}{3}$$

となることが確認できる。このように, lctを求めるには局所的な部分のみに着目するだけでなく, その

Aug. 2024

大域と局所と実と虚から見える特異点と数学の世界

他の大域的情報を探索することが必要であり、このような点を含めて特異点解消を得ることが困難である。この問題に対して、著者は原点における重複度の概念に着目して、複数の既約多項式の和の形で与えられる既約多項式で定義される超曲面の特異点に関して、ジェットスキームの理論から lct を計算する方法を検討し、以下の命題 (定理 A) が真であることを確認している。なお本結果はより一般的に拡張可能であるがまだ証明を終えていないため、非常にシンプルな形式であるがあえて定理として紹介する。

定理 A

$X = \text{Spec } \mathbf{R}[x, y, z, w]$ とし、閉部分スキーム $Y_1, Y_2 \subset X$ を考える。 Y_1 を $\{f = (xy + zw)^2 = 0\}$ で定義し、 Y_2 を $\{g = (xy^3 + zw^3)^2 = 0\}$ でそれぞれ定義する。 f と g の lct をそれぞれ τ_f, τ_g と定義するとき、 Y_1 と Y_2 の jet scheme の次元の情報を用いて

$$f + g = 0$$

の lct は

$$\tau = \frac{\tau_f + \tau_g}{2}$$

で与えられる。

以下、簡単に jet scheme の定義を紹介する。Mustata (2002) は jet scheme を用いて log canonical の概念を再構築している。記号はここまでに使っているものをそのまま使い、新しく m 次の jet scheme Y_m を考える。Mustata (2002) の結果は、特異点对 $(X, \tau Y)$ が log canonical であることと、任意の自然数 m について

$$\dim Y_m \leq (m+1)(\dim X - \tau)$$

が成り立つことが同値であるということである。Jet scheme は以下のように定義される。

scheme X の m -jet scheme X_m とは、任意の k -代数 A に対して、

$$\text{Hom}(\text{Spec } A, X_m) \cong \text{Hom}(\text{Spec } A[t]/(t^{m+1}), X)$$

を満たす scheme として定義される。

特に、 X_m の k 値点全体は $\text{Hom}(\text{Spec } k[t]/(t^{m+1}), X)$ に一致する。 $x \in X$ に対して、環準同型写像

$$r_x: \text{Spec } k[t]/(t^{m+1}) \rightarrow X$$

$$r_x(\text{Spec } k) = x$$

を m -jet という。

m -jet scheme X_m は次のように計算すれば良い。

$m = 0$ とする。

$$\text{Hom}(\text{Spec } A, X_0) \cong \text{Hom}(\text{Spec } A[t]/t, X) = \text{Hom}(\text{Spec } A, X)$$

であるから、 $X_0 = X$ である。

scheme X に対して m -jet scheme X_m を考えるには、 $A[t]/(t^{m+1})$ に所属するべき級数を考えることになる。したがって、例えば、

$$xy^3 + zw^3 = 0$$

について考える場合は

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots,$$

$$w = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$$

を超曲面の方程式に代入して、 t の次数毎の情報の方程式から得られる情報から jet scheme の次元を計算すればよい。

著者は、定理 A について、任意の一つの既約多項式で与えられる閉部分スキーム $Y_1, Y_2 \subset X$ に対して

$$\tau_f \leq \tau \leq \tau_f + \tau_g$$

が成り立つ例が複数存在することを確認している。ただし、 τ_f は Y_1, Y_2 から得られる lct の小さい方とする。特に、 m -jet scheme から得られる通常のユークリッド空間上の点の重複度と似たような概念の情報がこの不等式の関係性を決めており、特定の条件では不等式でなく τ の値は等号で与えられるものと推測している。なお、この概念で τ を計算する場合は局所や大域のことを考える必要はなく、実でも虚でも同様に計算することができる。しかしながら、実数と虚数の世界では考えている対象が異なるはずであるため、得られた結果については別の考察が必要になる。

4. 結び

最後に、数学とその他の分野への応用について本稿で記述した内容と関連させて考察する。

本稿の内容に纏わる多くの数学的要素は現時点では他分野に応用できるものはほとんど無さそうに見える人が多いものと考えられる。現在では、IT の発展や様々なコンピュータデバイス (PC, タブレット, IoT 機器など) が普及しているため、数学の重要性が認識されている状態であると言える。

しかしながら、その多くの考え方の基礎は「2 は 1 より大きい」、「3 は 2 より大きい」などの自然数や整数、または有理数の差における大きさの評価に基づくものである。田上学長の 2024 年 3 月 13 日の FD での講演 (最終講義) の中でもデジタルイゼーションの話題がとりあげられていたが、多くのサイエンスはこの数値化から始まる。数値化の手法は様々であるが、数値化された後は自然数、整数、または有理数を軸とする空間の上で議論される。もともとのデータには距離の概念があったり、あったとしても「自然数、整数、または有理数を軸とする空間」ではない可能性があるにも関わらず。

また、数値化されたデータは確かに実数の集合の部分集合である。しかし、コンピュータでは実数は厳密には扱うことはできない。実際、加法の結合法則はコンピュータ上では成立しない。確かに計算上は僅かな誤差でしかなく、それを気にする必要はない。しかし、複素数が実数体の 2 次の拡大体として構成されることを理解できれば (高校ではこれを複素数平面という分野で実は学んでいる)、コンピュータ上での計算は有限体の拡大体と相性が良さそうなのが考えられるはずであるが、代数学という分野を学ぶ機会は多くの人になく、どれだけ時代が進んで技術が進歩しているように見えても、研究者や科学者、技術者であったとしても多くの人にとって「必要」または「重要」であると考えられるものに絞り込んで学ぶべきものが選別されることは非常に残念なことである。

数学史では、紀元前 3 世紀頃にアルキメデスは無限級数の概念を用いて放物線の面積を求積する方法 (高校入試の放物線の問題に良く出題される概念を用いて放物線を細かな三角形に分割するというアイデア) にたどり着いてたとされている。これは 1600 年代にニュートンやライプニッツが発見した微分積分の概念に深く関係するものである。中世のヨーロッパでやっと掛け算の概念や記号が定義されたというのにである。この事実は、微分積分のもとなる概念は遥か昔に考えられていたにも関わらず長い間進化を遂げることがなかったと言えるし、現代の日本では、高校の数学で微分も積分も学んでいるがその本質的な部分は多くの人にとって関心もなく、ただ AI データサイエンスに微分積分が重要であるが、とにかく計算ができればよいし計算はコンピュータに任せておけば良いと考えている人が存在することも悲しい限りである。

AI データサイエンスに限らず、微分積分や線形代数は、文系理系の枠を超えてその基礎をつくる上で重要な概念である。特に、線形代数は行列式の概念を二重添え字の部分の順列について対称群として考えることから多くの性質が導かれるのであるが、この点もただの計算と認識されることが多い。本稿で紹介した jet scheme の計算ではこのような添え字の対応関係が重要になる場面が見られるのであるが、

Aug. 2024

大域と局所と実と虚から見える特異点と数学の世界

このような発見や気付きは、科学として重要な線形代数の考え方がなければ存在しないことになる。

最後に、科学の分野において重要な概念である「比較」について考察する。本章の冒頭で述べた通り、多くの「比較」は何らかの対象から得られた「数値化されたデータ」の差や比などの計算によって得られることが多い。この差や比は「自然数、整数、または有理数を軸とする空間」から得られたものである。この時点で元の情報が持っているものが数値化された空間でそのまま引き継がれているかどうかはわからないし、その上で四則演算によって得られるものがどういう情報であるかということも分からなくなっているものも多数存在しているはずである。本稿では1章で代数的集合というものを定義しているが、これは閉集合の公理を満たすため、その位相空間において「近さ」の概念が定義できる。この位相空間はザリスキー位相と呼ばれている。ザリスキー位相の空間では、例えば、1つの点（ある方程式の解）からなる集合は閉集合 F_1 であるため、その点の補集合である集合 F_1^c は開集合である。したがって、異なる点からなる閉集合 F_2 の補集合に対応する開集合 F_2^c を考えると、 $F_1^c \cap F_2^c \neq \emptyset$ になる。代数的集合はこのような点の集合であることから、ザリスキー位相の空間の任意の開集合 O_1, O_2 について、 $O_1^c \cap O_2^c \neq \emptyset$ が成り立つ。つまりハウスドルフでない、これは我々が日常的に考えているように2つの対象を完全に切り分けて考えることができないものになっている。ところで、例えば「1と2というデータ」が与えられたときに、この2つのデータは、自然数のように隣り合っていると考えるのか、実数のように離れていると考えるのかそもそも曖昧に考えられていることが多い。主には計算の都合によって、あるいはそもそもそういうことを考えずにただの作業として何も考えることなく計算が実行されているのかもしれない。

ザリスキー位相では、我々の世界のように定規が用意されておらず、「近さ」のようなものが測れないように思われるかもしれない。しかしながら、この世界は多項式環の概念を利用することができ、1点は極大イデアルが対応し、それ以上の大きさの集合に対しては素イデアルが対応する。このようなイデアルの概念を活用すれば、この空間においても様々な情報の抽出が可能である。用意されていないのであれば新しく定義すれば良く、そのためには単に学習して覚えたり理解したりするだけでなく、創り上げることが重要になる。このように思考を通して、まだ世界で認識されていない数学の重要性が多くの科学者に認識されるための数学の研究が必要であると考えられる。

参考文献

Mircea Mustata, Singularities of Pairs via Jet Schemes, JOURNAL OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, Volume 15, pp.599-615 (2002)