〔査読論文〕

標準偏差の変化が期待効用に与える影響

青　木　博　明

1　はじめに

不確実性を扱う問題においては，リスクの指標として標準偏差がよく用いられるが，そのとき投資家は収入の標準偏差の増加を嫌う，言い換えれば，期待効用は標準偏差の減少関数である，ということが暗に前提とされていることが多い。本稿はそういえるための収入の確率分布に関する十分条件を示し，またこれまでの議論を整理している。加えて，標準偏差が期待効用に与える影響に関するその他の分析もおこなっている。これはポートフォリオ分析の平均分散アプローチの問題においても適用される。

一般に，効用関数が凹のとき，つまりその2階微分が負のとき，経済主体は危険回避的であるとされる。実際，効用関数が凹のとき，一般にその期待効用は収入の期待値に対する効用より小さくなる。よって，上の危険回避的という言葉は適切である。しかし効用関数が凹であっても，標準偏差の増加が期待効用を減少させるとは限らない。

一般に，収入の標準偏差の増加が期待効用の減少をもたらす十分条件として，効用関数に関してはそれが収入の2次関数であることが知られている。しかし効用関数が収入の2次関数であることはかなり強い制約である。また収入の確率分布に関しては，それが正規分布であることがよく取り上げられる。本稿では，効用関数が凹のとき，収入の確率分布が一定の条件を満たせば，収入の標準偏差の増加が期待効用の減少をもたらすことについて議論するが，その確率分布に関する条件は，確率変数の標準化変数の確率分布が期待値と標準偏差の値に依存せずに同じである，という仮定で，これは正規分布を含む，よりゆるい条件である。

この確率分布に関する条件は，Meyer(1987) においては LS（Location and Scale parameter）condition と呼ばれているが，この LS condition の下では，効用関数が凹関数のとき，収入の標準偏差の増加が期待効用の減少をもたらすことが Meyer(1987) においてすでに示されている。さらにこのことは，実はそれに先行する Tobin(1965) においても示されている。ただし Tobin(1965) は，確率に関する条件の説明が Meyer(1987) と異なり，またその数式から結論を得るのにはさらに推論が必要なのに対して，Meyer(1987) が導いた数式は直接大小関係を示すもので，その点で重要なものである。ただしその数式には一部間違いがある。

本稿で新たに得た結論は次のようなものである。まずその Meyer(1987) における結論の数式に間違いがあるので，それを指摘した。さらに，これまでその変数が1次元に限られて論じられてきた効用関数を n 次元にまで一般化し，その場合にも1次元の場合と同様の命題が成立することを示した。その際，1次元の場合の Tobin(1965) のいくぶん直観的な証明の代わりに，厳密かつより一般的な証明を示した。ただし n 次元に拡張した場合は，標準偏差の変化をあるパラメータによって規定した。また期待効用に対する収入の標準偏差による2階微分や弾力性についても結論を導いている。さらに確率分布

の条件である LS condition に関して考察を加え，これまでの文献上の議論をまとめた。

効用関数の変数を n 次元に拡張することの意義は次のように考えられる。

1）効用を収入の間接効用関数でなく，複数の財・サービスの消費量の直接効用関数と考えることができる。

2）将来の複数期間に亘る効用を考えるときには，その効用関数の変数を複数の期間の収入とする必要がある。

最後に，上の 2）の場合に関連して，収入がランダム・ウォークにしたがう資産価格の確率的な変化によって規定される場合の分析を行っている。

2　標準偏差の増加に対する期待効用の変化

収入に対する効用関数を考える。収入は確率変数とする。まず効用関数が収入に対して増加関数かつ凹であるとき，期待効用は収入の期待値で評価された効用よりも小さいことを示す。つまり効用関数が凹の場合，危険回避者になることを示す。

x は収入で 1 次元の確率変数として，$f(x)$ をその確率分布とする。x の期待値と標準偏差を μ と σ とする。$U(x)$ を効用関数とし，x に対して増加関数で凹とする。

μ を基点に x に関して次のテイラー展開を行う。θ は μ と x のある中間値である。

$$U(x) = U(\mu) + (x-\mu)\,U'(\mu) + 1/2\,(x-\mu)^2 U''(\theta) \tag{1}$$

この両辺に $f(x)$ をかけて x で積分して期待効用 EU を求める[1)]。$[a_x, b_x]$ を x の積分区間とする。a_x, b_x は有限と無限の場合がありうる。

$$EU = \int_{a_x}^{b_x} U(x) f(x)\,dx = U(\mu) + \int_{a_x}^{b_x} 1/2\,(x-\mu)^2 U''(\theta) f(x)\,dx \tag{2}$$

効用関数が凹であることから，この式の右辺の第 2 項が非正となり，次が成立する[2)]。

$$EU \leq U(\mu) \tag{3}$$

(3) において，もし効用関数を凹ではなく狭義凹とすると，(2) の右辺の第 2 項が負となり，(3) の不等式も厳密な不等式で成り立つ。また符号に関する“非正”という表現は“負”となる。このことは以下の内容についても同様である。

次に標準偏差の増加が期待効用を押し下げることを証明するが，それは収入の確率分布に関するある条件の下で成立する。その条件に関して，過去の文献にも触れながら，以下説明を行う。

σ を x の標準偏差として，次の変形を行う。

$$x = \mu + \sigma(x-\mu)/\sigma = \mu + \sigma\varepsilon \tag{4}$$

よって次に示すように ε は，x からその期待値を引き標準偏差で割った標準化変数となる。ε の確率分布を $\phi(\varepsilon)$ とする。ε の期待値は 0，標準偏差は 1 となる。

$$\varepsilon = (x-\mu)/\sigma, \qquad \varepsilon \sim \phi(\varepsilon) \tag{5}$$

さてここで，x の標準化変数である ε の確率分布 $\phi(\varepsilon)$ が μ と σ に依存しないという条件を仮定する。今，仮にこの条件を SI condition（標準化 (Standard) 変数が同一 (Identical)）と呼ぶ。任意の正

規分布について，それを標準化したものは標準正規分布に従うので，正規分布はSI conditionを満たす。他に一様分布なども同様にSI conditionを満たす。よってSI conditionは正規分布を含むより広い確率分布に対応する。

他方Meyer（1987）においてはLS conditionという言葉が使われている。LS conditionとは，２つの確率変数x，yがある定数α，β（＞0）に対して，$y=\alpha+\beta x$で表されるならば，このx，yはLS conditionを満たすというものである[3)]。ところがLS conditionを満たす二つの確率分布はSI conditionを満たし，逆にSI conditionを満たす二つの確率分布はLS conditionを満たすことが分かる[4)]。よって本稿でもMeyer（1987）にしたがって，上記の確率に関する条件をLS conditionと呼ぶ。

ところでこのLS conditionは確率分布間の関係についての条件であって，個々の確率変数xもしくはその標準化変数のεの確率分布である$f(x)$，$\phi(\varepsilon)$の形状については特に制限はない。正規分布のように対称的である必要もなく，任意の形状を取り得る。その意味でも，LS conditionは正規分布，一様分布などを含むより広い確率分布に対応する[5)]。

ここでLS condition条件と本稿で論じるテーマに関する文献上の議論を短くまとめておく。Meyer（1987）はLS conditionの下で「効用関数が凹ならば，収入の標準偏差の増加は期待効用を減少させる」ことを示した。しかし，上でも述べたように，実はそれに先行してTobin（1965）がすでにそのことを示していたのである。ただしTobin（1965）においてはLS conditionの代わりにTwo parametersの条件という言葉が使われ，この条件は，２つのパラメータによって確率分布が規定されること，と述べられている。そうすると，LS conditionとTwo parametersの条件は異なるものとなるが，「標準偏差の増加は期待効用を減少させる」が成立するのを示すことができるのはあくまでもLS conditionの下である。Sinn（1989）では，Tobin（1965）におけるこの２つの条件の混同の指摘があり，また同時にTobin（1965）がMeyer（1987）に先行するという指摘もある。

LS conditionを満たす重要で代表的な分布が正規分布であるが，正規分布は期待値と標準偏差を表す２つのパラメータだけを持ち，同時にそれらがLocationとScaleを示す。そのため，このような混同が生じたのではないかと推測される。実際，例えば対数正規分布は２つのパラメータによって規定されるが，LS conditionを満たさない。また，上で述べたように，LS conditionは個々の確率変数もしくはその標準化変数の分布については制限を与えない。確率分布が３つ以上のパラメータを持っている場合にも，LS conditionは成立しうる[6)]。

よってLS conditionの下では，$\phi(\varepsilon)$はμとσに依存せずに，期待効用EUは次のようになり，μとσの関数となることが示される。εの積分区間は$[a,\ b]$, $a=(a_x-\mu)/\sigma$, $b=(b_x-\mu)/\sigma$ となる。

$$EU=EU(\mu,\sigma)=\int_a^b U(\mu+\sigma\varepsilon)\,\phi(\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{6}$$

次にxの標準偏差の増加が期待効用を減少させることを示すために，(6)の期待効用をσで微分することで得られる２つの式を示す。ともにLS conditionの下では，$\phi(\varepsilon)$がσに依存しないことから導かれる。

$$\partial EU(\mu,\sigma)/\partial\sigma=\int_a^b U'(\mu+\sigma\varepsilon)\,\varepsilon\,\phi(\varepsilon)\,d\varepsilon\leq 0 \tag{7}$$

$$\partial EU(\mu,\sigma)/\partial\sigma=-\sigma\int_a^b U''(\mu+\sigma\varepsilon)\int_a^\varepsilon t\,\phi(t)dt\,d\varepsilon\leq 0 \tag{8}$$

(7) は (6) を σ で微分して直接得られるもので，Tobin (1965) において示された式である。(7) の最後の不等式は，次のような論法を使っている。すなわち $U''(x) \leq 0$ であり，$U'(x)$ は x の減少関数なので，(7) において $U'(\mu+\sigma\varepsilon)$ は $\varepsilon\phi(\varepsilon)$ に対して，ε の正の範囲よりも負の範囲により重いウエイトを与える。また $\int_a^b \varepsilon\phi(\varepsilon)d\varepsilon = 0$ なので，よって最後の不等式が成立するという論法である[7)]。

(8) は Meyer (1987) にある[8)]。$\int_a^\varepsilon t\phi(t)dt \leq 0$ なので，より直接的に (8) の不等号を証明しているといえる。その意味でも，また分析上の利用においても重要な数式である。ただし Meyer (1987) の数式では (8) の右辺の最初に“$-\sigma$”が抜け落ちている。それを示すためにも，(8) の証明を Appendix で行う。

$EU(\mu,\sigma)$ を σ で 2 階微分すると，(7) より次に示すようにその符合が負であることが分かる。

$$\partial EU^2(\mu,\sigma)/\partial\sigma^2 = \int_a^b U''(\mu+\sigma\varepsilon)\,\varepsilon^2\phi(\varepsilon)d\varepsilon \leq 0 \tag{9}$$

σ が大きくなるほど σ の増加に対する EU の下落の度合は大きくなるのである。横軸に σ，縦軸に EU をとると，下に凹な減少曲線を描くことになる。

またこのことから，標準偏差が十分大きくなると期待効用がマイナスになるといういくぶんパラドキシカルな結果を導くことになる。この原因はどこにあるのか。それは，σ が大きくなると x の範囲が負の領域にも大きく広がるため，と考えられる。したがってこの結果を避けるためには，x の負の領域についての配慮が必要となる。例えば σ がいくら大きくなっても，x はある値以下にはならないなどの条件が考えられる。この点は LS condition の問題点といえるかもしれない[9)]。

3　確率変数 x の n 次元への拡張

次に，確率変数 x の n 次元への拡張を試み，その場合も上の 1 次元の場合と同様な結論が得られることを示す。ただし x の標準偏差の変化を各変数に共通なパラメータで規定することを考える。上記の 1 次元のモデルを拡張した次のモデルを考える。

x_i は確率変数で，μ_i をその期待値，σ_i を標準偏差とする。

$$x_i = \mu_i + \sigma_i(x_i-\mu_i)/\sigma_i = \mu_i + \sigma_i\varepsilon_i, \qquad i = 1,\ldots,n \tag{10}$$

$$\varepsilon_i = (x_i-\mu_i)/\sigma_i, \qquad i = 1,\ldots,n \tag{11}$$

ε_i は x_i の標準化変数で，その期待値は 0，標準偏差は 1 となる。1 次元の場合と同様，x_i の積分区間を $[a_{xi}, b_{xi}]$ とし，それに対する ε_i の積分区間を $[a_i, b_i]$ とする。$a_i = (a_{xi}-\mu_i)/\sigma_i$，$b_i = (b_{xi}-\mu_i)/\sigma_i$ である。各積分区間は有限と無限の場合がありうる。

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\varepsilon}$ を $x_i, \mu_i, \varepsilon_i$ を i 番目の要素とする n 次元ベクトルとして，(12) で (10)(11) の内容をベクトル表記する。$\phi(\boldsymbol{\varepsilon})$ を $\boldsymbol{\varepsilon}$ の同時確率密度分布とする。LS condition として確率分布 $\phi(\boldsymbol{\varepsilon})$ は μ_i と $\sigma_i(i = 1,\ldots,n)$ に依存しないと仮定する。$\boldsymbol{\Lambda}$ を σ_i を対角要素とする $n\times n$ の対角行列とする。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Lambda\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \phi(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \sigma_i & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}, \qquad i = 1,\ldots,n \tag{12}$$

ここで各 σ_i を共通に規定する正のパラメータ γ を考え，それを次のように記述する。γ の一つの解釈をこの章の最後に示す。

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}(\gamma) \quad (\sigma_i = \sigma_i(\gamma),\ i = 1,\ldots,n) \tag{13}$$

また σ_i の γ に対する弾力性が一定で，各 i で同じ正の値 c を取ると仮定する。

$$\frac{d\sigma_i/\sigma_i}{d\gamma/\gamma} = c > 0,\ \text{よって}\ d\sigma_i/d\gamma = c\sigma_i/\gamma > 0, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{14}$$

d_i を任意の正の値として，一般的に $\sigma_i = d_i\gamma^c$ が (14) を満たす。よって $\sigma_i = \gamma\,(c=1, d_i=1)$ または $\sigma_i = d_i\gamma(c=1)$ も (14) を満足する。前者は γ を各 i 共通の標準偏差とすることを意味する。その意味で，このようなパラメータによる記述は標準偏差そのものの変化を記述するよりもより一般的といえる。

(13) の表記を使えば，(14) は次のように記述される。

$$\partial\boldsymbol{\Lambda}(\gamma)/\partial\gamma = c/\gamma\boldsymbol{\Lambda}(\gamma) \tag{15}$$

(14) より γ の増加が各要素の標準偏差を増加させることが分かる。では γ の増加が n 次元の変数の全体の標準偏差を増加させるか否か，を考察しておく。ただし n 次元の変数の分散という概念は直接的にはないので，n 次元モデルでの分散を改めて考える必要がある。候補としては，各要素の分散の和と各要素の和の分散を挙げることができるが，前者は，γ の増加が各要素の分散を増加させることから自明である。後者の各要素の和の分散は，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{\mu}$ の各要素の和の差の 2 乗の期待値として得られるが，それを TV とおいて計算する。r_{ij} は ε_i と ε_j の相関係数である。

$$TV \equiv E\left(\sum\nolimits_i x_i - \sum\nolimits_i \mu_i\right)^2 = E\left(\sum\nolimits_i\sum\nolimits_j \sigma_i\,\sigma_j\,\varepsilon_i\,\varepsilon_j\right) = \sum\nolimits_i\sum\nolimits_j \sigma_i\,\sigma_j r_{ij} > 0 \tag{16}$$

次に TV を γ で微分する。LS condition の下では，γ の変化に対して ε_i と ε_j の確率分布は変化しないので，r_{ij} は変化しない。(17) において c/γ と $\sum_i\sum_j \sigma_i\,\sigma_j\,r_{ij}$ は正なので，γ は TV を増加させることが分かる[10)]。

$$\begin{aligned} dTV/d\gamma &= \sum\nolimits_i\sum\nolimits_j (d\sigma_i/d\gamma\,\sigma_j r_{ij} + \sigma_i\,d\sigma_j/d\gamma\,r_{ij}) \\ &= 2c/\gamma\sum\nolimits_i\sum\nolimits_j \sigma_i\,\sigma_j r_{ij} > 0 \end{aligned} \tag{17}$$

それでは，まず変数が n 次元の場合，1 次元の場合と同様，効用関数が増加関数かつ凹であるとき，期待効用は期待値で評価された効用よりも小さいこと，つまり危険回避者になることを示す。

$U(\boldsymbol{x})$ は上と同様増加関数で凹とする。$U(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{\varepsilon}$ によってテイラー展開する。

$$U(\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Lambda\varepsilon}) = U(\boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\Lambda}\,[U'(\boldsymbol{\mu})] + 1/2\ \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\Lambda}\,[U''(\boldsymbol{\theta_x})]\boldsymbol{\Lambda\varepsilon} \tag{18}$$

ここで $[U'(\boldsymbol{x})]$ を i 要素を $\partial U(\boldsymbol{x})/\partial x_i$ とする n 次元の列ベクトル，$[U''(\boldsymbol{\theta_x})]$ を $\partial^2 U(\boldsymbol{x})/\partial x_i\partial x_j$ を i, j 要素とする $n\times n$ 行列とする。$U(\boldsymbol{x})$ が凹なので $[U''(\boldsymbol{\theta_x})]$ は半負値定符合となる。ここで $\boldsymbol{\theta_x} = \boldsymbol{\mu} + \alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})$，$\alpha$ は $0 < \alpha < 1$ のある値である。(18) の期待値を取ることで期待効用 EU が計算される。

$$EU = U(\boldsymbol{\mu}) + 1/2E\,(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\Lambda}\,[U''(\boldsymbol{\theta_x})]\boldsymbol{\Lambda\varepsilon}) \tag{19}$$

$[U''(\boldsymbol{\theta_x})]$ は半負値定符合なので，(19) の右辺の第 2 項は非正となる。よって次がいえる。

$$EU \leq U(\boldsymbol{\mu}) \tag{20}$$

これで期待効用は $\boldsymbol{x}$ の期待値で評価された効用よりも小さいことが示された。

次に期待効用が γ の増加によって減少することを証明する。そのために（20）を利用する。次の命題が成り立つ[11)]。

［命題１］

効用関数 $U(\boldsymbol{x})$ を増加関数かつ凹とする。$\boldsymbol{x}$ は n 次元の確率変数で，LS condition を満たすとする。γ を各 σ_i を規定するパラメータとし，各 σ_i の γ に対する弾力性は同じで正とする。このとき γ の増加は $U(\boldsymbol{x})$ の期待効用を減少させる。

［証明］

$U(\boldsymbol{x})$ に関して原点 $\mathbf{0}$ を基点に任意の $\boldsymbol{\varepsilon}$ の値に対して１次のテイラー展開を行う。ここで $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}}=\mathbf{0}+\alpha(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{0})=\alpha\boldsymbol{\varepsilon}$（$0<\alpha<1$）。

$$U(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\varepsilon})=U(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\mathbf{0})+\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}})] \tag{21}$$

これの期待値として次の期待効用を得る。

$$EU=U(\boldsymbol{\mu})+E(\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}})] \tag{22}$$

（20）と（22）から $E(\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}})]\leq 0$ となる。

次に $E(\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\varepsilon})]\leq E(\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}})]$ となることを示す。

$\boldsymbol{\varepsilon}$ を基点に原点 $\mathbf{0}$ に対して２次のテイラー展開を行う。

$$\begin{aligned}U(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\mathbf{0})&=U(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\varepsilon})+(\mathbf{0}-\boldsymbol{\varepsilon})'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\varepsilon})]\\&\quad+1/2(\mathbf{0}-\boldsymbol{\varepsilon})'\Lambda[U''(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}2})]\Lambda(\mathbf{0}-\boldsymbol{\varepsilon})\end{aligned} \tag{23}$$

ここで $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}2}=\boldsymbol{\varepsilon}+\alpha_2(\mathbf{0}-\boldsymbol{\varepsilon})=(1-\alpha_2)\boldsymbol{\varepsilon}$（$0<\alpha_2<1$）。

（21）と（23）から次を得る。

$$0=-\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}})]+\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\varepsilon})]-1/2\,\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U''(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}2})]\Lambda\boldsymbol{\varepsilon} \tag{24}$$

ここで $U(\boldsymbol{x})$ は凹であるから，$\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U''(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}2})]\Lambda\boldsymbol{\varepsilon}\leq 0$ である。よって任意の $\boldsymbol{\varepsilon}$ に対して次が成り立つ。

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\varepsilon})]\leq\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}})] \tag{25}$$

この両辺の期待値を取ると次を得る。

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\varepsilon})]\leq E(\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}})] \tag{26}$$

これと $E(\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}})]\leq 0$ から $E(\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\varepsilon})]\leq 0$ を得る。
よって（15）から次が証明される。

$$\begin{aligned}\partial EU(\boldsymbol{\mu},\gamma)/\partial\gamma&=E(\partial U(\boldsymbol{\mu}+\Lambda(\gamma)\boldsymbol{\varepsilon})/\partial\gamma)\\&=c/\gamma\,E(\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\varepsilon})]\leq 0\end{aligned} \tag{27}$$

したがって，γ の増加は $U(\boldsymbol{x})$ の期待効用を減少させる（増加させない）ことが示された。

証明　終り

さて (20) (22) (26) (27) より次が成り立つ。

$$\partial EU(\boldsymbol{\mu},\gamma)/\partial\gamma = c/\gamma\, E(\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda(\gamma)\boldsymbol{\varepsilon})])$$
$$\leq c/\gamma\, E(\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda(\gamma)\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}})])$$
$$= c/\gamma\,(EU(\boldsymbol{\mu},\gamma)-U(\boldsymbol{\mu}))\leq 0 \tag{28}$$

よって次がいえる。

$$\partial(EU(\boldsymbol{\mu},\gamma)-U(\boldsymbol{\mu}))/\partial\gamma \Big/ (c/\gamma)(EU(\boldsymbol{\mu},\gamma)-U(\boldsymbol{\mu}))\geq 1 \tag{29}$$

今 γ によってもたらされる期待効用の減少分に注目し，それを DU とおく。つまり $DU=EU(\boldsymbol{\mu},0)-EU(\boldsymbol{\mu},\gamma)=U(\boldsymbol{\mu})-EU(\boldsymbol{\mu},\gamma)$ となる。よって次の不等式が成立する。

$$\frac{dDU/DU}{d\gamma/\gamma}\geq c=\frac{d\sigma_i/\sigma_i}{d\gamma/\gamma},\qquad i=1,\ldots,n \tag{30}$$

c は (14) で定義されているように σ_i の γ に対する弾力性の値である。よって期待効用の減少分 DU の γ に対する弾力性は，σ_i の γ に対する弾力性よりも大きいことになる。なお，このことは $\gamma=\sigma$, c ＝ 1 とすることで先の 1 次元のモデルにも適用される。

次に n 次元の場合の EU の γ による 2 階微分の計算を行う。(27) より次を得る。

$$\partial^2 EU(\boldsymbol{\mu},\gamma)/\partial\gamma^2 = c/\gamma^2 E(\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U'(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\varepsilon})])(c-1)+c^2/\gamma^2 E(\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U''(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\varepsilon})]\Lambda\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{31}$$

よって $1\leq c$ のときは 2 階微分が非正になることが分かる。特に $c=1$ の場合，これは各 i に対して $\sigma_i=\gamma$ または $\sigma_i=d_i\gamma$ のときを含むが，次の式が得られる。これは (9) に近い形となっている。

$$\partial^2 EU(\boldsymbol{\mu},\gamma)/\partial\gamma^2 = 1/\gamma^2 E(\boldsymbol{\varepsilon}'\Lambda[U''(\boldsymbol{\mu}+\Lambda\boldsymbol{\varepsilon})\Lambda\boldsymbol{\varepsilon}]\leq 0 \tag{32}$$

これらの結果を［**命題 2**］にまとめる。

［**命題 2**］

効用関数 $U(\boldsymbol{x})$ を増加関数かつ凹とする。$\boldsymbol{x}$ は n 次元の確率変数で，LS condition を満たすとする。γ を各 σ_i を規定するパラメータとし，各 σ_i の γ に対する弾力性は同じで正とする。また DU を γ によってもたらされる期待効用の減少分とする。

このとき DU の γ に対する弾力性は σ_i の γ に対する弾力性よりも大きい。また σ_i の γ に対する弾力性が 1 以上ならば，γ の $EU(\boldsymbol{x})$ に対する 2 階微分は非正である。

n 次元の場合もやはり，σ_i の γ に対する弾力性が 1 以上ならば，標準偏差が十分大きくなると期待効用が負になるという，いくぶんパラドキシカルな結果を導くことになる。

次に (14) で規定される γ とこれまで得られた結論の一つの適用例を示す。今ある家計を想定し，その家計の t 期の収入 x_t が勤労所得 y_t と資産から得られる収入 z_t からなるものとする。勤労所得 y_t は非確率的であるとし，他方 z_t は，その家計が t 期に所有する資産，例えば株式や土地から得られる収入とする。その資産の価値を s_t とし，s_t はドリフト付きのランダム・ウォークの確率過程にしたがい，(33) で規定されるものと仮定する[12)]。

$$s_0 = a,\quad s_t = \delta + \rho s_{t\text{-}1} + \xi_t,\qquad t = 1,2,3,... \tag{33}$$

ξ_t は，通常仮定されるように，t が異なるものは互いに独立で，同一の確率分布にしたがうものとする。a はある定数である。ξ_t の期待値を μ_ξ，標準偏差を σ_ξ とする。σ_ξ は s_t の第１期の標準偏差でもある。r を資産 s_t から得られる利益率とする。したがって，s_t から得られるインカム・ゲインは rs_t，キャピタル・ゲインは $s_t - s_0$ となる[13)]。よって t 期の収入 x_t は次のようになる。

$$x_t = y_t + z_t = y_t + rs_t + s_t - s_0 = y_t - s_0 + (1+r)s_t \tag{34}$$

x_t の期待値 $E(x_t)$ は次の（35），分散 $V(x_t)$ と標準偏差 $D(x_t)$ は（36）で示される。

$$E(x_t) = y_t - s_0 + (1+r)\left(\rho^t s_0 + \left(\sum_{i=1}^{i=t}\rho^{i-1}\right)(\delta + \mu_\xi)\right) \tag{35}$$

$$V(x_t) = (1+r)^2 \sum_{i=1}^{i=t}\rho^{2(i-1)})\,\sigma_\xi^2,\qquad D(x_t) = (1+r)\sqrt{\sum_{i=1}^{i=t}\rho^{2(i-1)}}\,\sigma_\xi \tag{36}$$

よって $d_t = (1+r)\sqrt{\sum_{i=1}^{i=t}\rho^{2(i-1)}}$，$\gamma = \sigma_\xi$ とおくと，（13）（14）に関連して $D(x_t) = \sigma_t = d_t\gamma$ となり，σ_t の γ に対する弾力性は全ての t に関して１となり（14）の条件を満たす。これを［**命題１**］に適用すると，次のような結論を得る。すなわち，（34）でランダム・ウォークを規定する確率変数 ξ_t の標準偏差 σ_ξ が増加すると，x_t を t 期の収入とする複数期間（ n 期間）に亘る効用の期待効用は減少する。σ_ξ は将来の資産価値の変動・リスクの大きさを示すパラメータであり，s_t の第１期の標準偏差でもある。［**命題２**］など上で得られたその他の結論も適用されることになる。［**命題２**］を適用すると，σ_ξ の期待効用に対する２階微分は非正であり，σ_ξ が十分増加すれば期待効用は負になりうるということになる。

上ではあえて確実な勤労所得 y_t にその価値が不確実な資産 s_t から得られるインカム・ゲインとキャピタル・ゲインを加えた総和 x_t を収入として分析を行った。しかし，そこから y_t を分離した，資産から得られるインカム・ゲインとキャピタル・ゲインのどちらか，もしくはその和を対象とした期待効用を考えても，同様な結論が得られることは（34）から明白である。その方が議論は簡潔となろう。

一般に収入の不確実性は将来における複数期間においてより明確に発生するものである。その点で，複数期間の収入を変数として扱える n 次元の効用関数について上述の結論を得たことは意味を持つと考える。ところで，経済主体にとって将来の資産価値の不確実性に関する情報は客観的な確率分布としてでなく，状況から判断される主観的な確率として得られることもある。この場合は（33）の確率項 ξ_t の標準偏差である σ_ξ を，経済主体が主観的に判断する不確実性の大きさとしてとらえることができる。このことをより簡潔に示すためには（33）において，$\delta = 0$，$\rho = 1$ とした，より単純なランダム・ウォークの式を示した方がよいであろう。この場合（33）はより簡潔な次式で示される。

$$s_0 = a,\quad s_t = s_{t-1} + \xi_t,\qquad t = 1,2,3,\cdots \tag{37}$$

勤労所得を含まないものとする。すると $V(x_t) = (1+r)^2\, t\,\sigma_\xi^2$, $D(x_t) = (1+r)\sqrt{t}\,\sigma_\xi$, よって $d_t = (1+r)\sqrt{t}$, $\gamma = \sigma_\xi$, $D(x_t) = \sigma_t = d_t\,\gamma$ となり，やはり（14）の条件を満たす。（33）よりこれらの式とその確率項である ξ_t，σ_ξ の方が，より簡潔に経済主体の“漠然とした”将来の資産価値の主観的な不確実性を表しているといえよう。そして LS condtion の下では，危険回避的な経済主体にとっては，この将来の複数期間に亘る資産価値の主観的な不確実性（σ_ξ）が大きくなると，資産の収益の期待値が変わらなくても，それがもたらす期待効用が小さくなることが示されたことになる。

4 おわりに

危険回避的な経済主体は収入の標準偏差の増加を嫌う，というのはポートフォリオの問題では基本的事項となっているといえる。そしてこのことがいえるための収入の確率分布に関する条件は，確率分布が正規分布であることである，という記述しか日本語の文献では見当たらない。本稿では，その確率分布の条件が正規分布よりもゆるいLS conditionの下で成り立つことを示し，またそれに関するこれまでの文献上の議論をまとめ，一部間違いを修正した。

また効用関数の成分を n 次元に拡張して，1次元の場合と同様のことがいえることを示した。ただしパラメータによって標準偏差の変化を規定し，その弾力性が各変数で一定の正の値であるという仮定を設けた。しかしこの仮定は全て変数の標準偏差が同じである場合や各標準偏差がそのパラメータの比例式で表せる場合を含むもので，標準偏差の変化そのものより一般的な表現ともいえる。この n 次元への拡張は，上でも述べたが，離散的な複数期間に亘る効用や，複数の財・サービスの消費の直接的な効用関数を考える場合に意味を持つことになる。

そして n 次元に拡張した場合の結論を，ランダム・ウォークにしたがう将来の資産価値の確率的な変化を伴なう収入に適用し，将来の複数期間に亘る資産価値の標準偏差の増加が，危険回避的な経済主体の期待効用を下げることを示した。

Appendix

(8) の証明を行う。同時にMeyer(1987) の (2) との比較を行い，その過誤を示す。

一般に $(A(\varepsilon)B(\varepsilon))' = A'(\varepsilon)B(\varepsilon) + A(\varepsilon)B'(\varepsilon)$ の両辺を積分することによって，次が得られる。

$$\Big[A(\varepsilon)B(\varepsilon)\Big]_a^b = \int_a^b A'(\varepsilon)B(\varepsilon)\,d\varepsilon + \int_a^b A(\varepsilon)B'(\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{A1}$$

ここで $A(\varepsilon) = U'(\mu + \sigma\varepsilon)$, $B(\varepsilon) = \int_a^\varepsilon t dF(t)$ とおく，よって $A'(\varepsilon) = \sigma U''(\mu + \sigma\varepsilon)$, $B'(\varepsilon) = \varepsilon F'(\varepsilon)$ となる。t は積分変数である。$F(\varepsilon)$ は ε の累積分布である。よって $F'(\varepsilon) = \phi(\varepsilon)$ であり，$dF(\varepsilon) = F'(\varepsilon)d\varepsilon = \phi(\varepsilon)d\varepsilon$ となる。

これらを (A1) に代入して次を得る。

$$\Big[U'(\mu + \sigma\varepsilon)\int_a^\varepsilon t dF(t)\Big]_a^b = \int_a^b \big(\sigma U''(\mu + \sigma\varepsilon)\int_a^\varepsilon t dF(t)\,d\varepsilon + \int_a^b U'(\mu + \sigma\varepsilon)\,\varepsilon F'(\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{A2}$$

また $\int_a^b t dF(t) = 0$ なので，次に示すように (A2) の左辺は0となる。

$$\Big[U'(\mu + \sigma\varepsilon)\int_a^\varepsilon t dF(t)\Big]_a^b = U'(\mu + \sigma b)\int_a^b t dF(t) - U'(\mu + \sigma a)\int_a^a t dF(t) = 0 \tag{A3}$$

したがって (A2) から次を得る。

$$0 = \sigma\int_a^b \big(U''(\mu + \sigma\varepsilon)\int_a^\varepsilon t dF(t)\,d\varepsilon + \int_a^b U'(\mu + \sigma\varepsilon)\,\varepsilon F'(\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{A4}$$

$F'(\varepsilon) = \phi(\varepsilon)$ は非負で，その期待値は0である（つまり $\int_a^b t dF(t) = 0$）。よって $a < \varepsilon \leq 0$ において $\int_a^\varepsilon t dF(t) \leq 0$ となり，$0 < \varepsilon < b$ において $\int_a^\varepsilon t dF(t)$ は増加し続け，$\varepsilon = b$ において $\int_a^b t dF(t) = 0$ となる。これは，$\varepsilon = b$ を除く任意の ε に対して $\int_a^\varepsilon t dF(t) \leq 0$ となることを意味する。したがって $EU(\mu, \sigma) = \int_a^b U(\mu + \sigma\varepsilon)dF(\varepsilon)$ を σ で微分したものについて，(A4) から次を得る。

$$\partial EU(\mu,\sigma)/\partial\sigma=\int_a^b U'(\mu+\sigma\varepsilon)\,\varepsilon F'(\varepsilon)d\varepsilon=-\sigma\int_a^b U''(\mu+\sigma\varepsilon)\int_a^{\varepsilon} tdF(t)d\varepsilon\leq 0 \tag{A5}$$

Meyer（1987）の（2）では，上の（A5）の右辺の最初の“$-\sigma$”が抜けており，その点での修正が必要である。Meyer（1987）参照。

（A5）に $dF(t)=\phi(t)dt$ を代入すれば，次の（A6）が得られる。これは本文の（8）に等しい。

$$\partial EU(\mu,\sigma)/\partial\sigma=-\sigma\int_a^b U''(\mu+\sigma\varepsilon)\int_a^{\varepsilon} t\phi(t)dt\,d\varepsilon\leq 0 \tag{A6}$$

Q.E.D.

［謝　辞］

本稿を作成するに当たり，本学の小松弘明先生と龍谷大学の野村竜也先生に大変貴重なアドバイスを頂いた。また本稿の投稿後に，匿名レフェリーの先生方2名からとても有益なご指摘を頂いた。記して謝意としたい。

注

1）期待効用 EU は収束し，ある有限の値を取るものと仮定する。EU の収束の問題については Arrow（1974）を参照。同様に x の期待値と標準偏差もある有限の値を取るものとする。

2）（3）は Jensen の不等式からも導かれる。

3）Meyer（1987）では確率密度関数ではなく累積分布関数で LS condition が定義されている。

4）このことは次のようにして確かめられる。今，仮に x の期待値を μ_x，標準偏差を σ_x，標準化変数を ε_x とする。ここで $y=\alpha+\beta x$ とすると，y の期待値は $E(y)=\alpha+\beta\mu_x$，y の標準偏差は $\beta\sigma_x$，よって y の標準化変数は，$\varepsilon_y=(y-E(y))/\sigma_y=(\alpha+\beta x-(\alpha+\beta\mu_x))/\beta\sigma_x=\varepsilon_x$ となり ε_x に一致する。したがって LS condition を満たす2つの確率分布は SI condition を満たすことが分かる。逆に，SI condition を満たす2つの確率分布を $x=\mu_x+\sigma_x\varepsilon$, $y=\mu_y+\sigma_y\varepsilon$ とおくと $y=\mu_y+\sigma_y(x-\mu_x)/\sigma_x=(\mu_y-\mu_x\sigma_y/\sigma_x)+\sigma_y/\sigma_x\,x$ となる。したがって SI condition を満たす2つの確率分布は LS condition を満たす。

5）Meyer and Rasche（1992）は LS condition の妥当性に関する実証的分析を行っている。

6）それでも，Tobin（1965）の意図した条件が Meyer（1987）のいう LS condition と同じものかどうかは，判断しきれないところがある。少なくとも Two parameters を“2つのパラメータによって確率分布が規定される”と文字通り受け取るのは正確とは言えない。ただ最近の文献でも Two parameters という表現があるが，この場合の Two parameters は期待値と標準偏差に限定されているのかもしれない。Tobin（1965）の p20‒p21にその分析がある。（7）に相当する数式も Tobin（1965）の p21にある。なお LS condition については Linear class という表現も用いられる。

7）詳しくは，$U'(\mu+\sigma 0)=A$ とおいて，（7）と（7）の $U'(\mu+\sigma\varepsilon)$ を A で置換えたものを比較する。$\int_b^a \varepsilon\phi(\varepsilon)d\varepsilon=0$ が成立することと，$U''(x)\leq 0$ から，$\varepsilon<0$ ならば $A\leq U'(\mu+\sigma\varepsilon)$，$0\leq\varepsilon$ ならば $U'(\mu+\sigma\varepsilon)\leq A$ であることを利用することで証明できる。

8）（8）に相当する数式は Meyer（1987）の p424にある。

9）よって以下では当然ながら，σ が十分大きくなった場合には，$U(x)$ が x の負の値に対しても定義される，という仮定がおかれていることになる。

10）もし σ_i が γ によってのみ規定されるとすれば，当然 TV の増加と γ の増加は同値になる。その意味では，命題1において“γ の増加”を“TV（全体の分散）の増加”で置き換えることができる。

11）厳密にいえば，［**命題１**］においては $U(\boldsymbol{x})$ の凹性の仮定の下では期待効用を“増加させない”で，$U(\boldsymbol{x})$ の狭義凹性の仮定の下では“減少させる”とするべきだが，ここでは文脈の流れからこう表現しておく。

12）株価の動きがランダム・ウォークであるための根拠として「効率的市場仮説」がよく挙げられる。

13）もし資産が売却されなければ，キャピタル・ゲインはあくまでも含み資産としての利得である。またここでは現在価値への割引率は考えないが，割引率を考慮に入れても同様な結論を得る。

参考文献

刈屋武昭・小暮厚之（2002）『金融工学入門』東洋経済新報社。

酒井泰弘（1982）『不確実性の経済学』有斐閣。

野口悠紀雄（1974）『情報の経済理論』東洋経済新報社。

野口悠紀雄・藤井眞理子（2000）『金融工学』ダイヤモンド社。

細江守紀（1991）『不確実性と情報の経済分析』九州大学出版会。

Arrow, K. J.（1974），“The use of unbounded utility functions in expected-utility maximization: response”，*Quarterly Journal of Economics*, 88, pp.136-38.

Baron, D.（1977），“On the utility theoretic foundations of mean-variance analysis”，*Journal of Finance*, 32, pp.1683-97.

Levy, H.（1989），“Two-moment decision models and expected utility maximization: Comment”，*American Economic Review*, 79, pp.597-600.

Meyer, J.（1987），“Two-moment decision models and expected utility maximization”，*American Economic Review*, 77, pp.421-30.

Meyer, J. and Rasche, R.（1992），“Sufficient conditions for expected utility to imply mean-standard deviation rankings: Empirical evidence concerning the location and scale condition”，*ECONOMIC JOURNAL*, 102, pp.91-106.

Rothschild, M. and Stiglitz, J.（1970），“Increase risk I: A definition”，*Journal of Economic Theory*, 2, pp.225-43.

Sinn, H.W.（1989），“Two-moment decision models and expected utility maximization: Comment”，*American Economic Review*, 79, pp.601-02.

Tobin, J.（1965），“The theory of portfolio selection”，*in* Hahn, F. and F.Brechling（ed.）*The Theory of Interest Rates*, London: MacMillan, New York: St. Martin’s Press）.

（2009年１月15日掲載決定）