〔研究ノート〕

柴田敬の資本価値論と一般化された商品搾取定理について

西　　　　　　　　　淳

目　次

Ⅰ　はじめに
Ⅱ　柴田による資本価値論の展開
Ⅲ　鷲田 (1994) の議論
Ⅳ　Gintis and Bowles (1981) の資本価値論
Ⅴ　資本価値論が提起するもの
Ⅵ　おわりに
［補論］「一般化された商品搾取定理」の他の証明

Ⅰ　はじめに

西 (2022a) において，筆者は，柴田敬 (1902–1986) が，柴田 (1953) において資本価値論を展開し，生産財が価値的剰余を生むと考えても利潤の存在は説明できるという議論をしたことを紹介した。

よって，本稿では，その柴田が提出した議論がどういう問題を提起しているのかということをもう少しつっこんで検討する。

その際に参考になるのは，鷲田 (1992)，(1994) 等，Gintis and Bowles (1981) における議論である [1)]。

Ⅱ　柴田による資本価値論の展開

西 (2022a) でもみたように，柴田の議論は三財でなされている。だが，金生産部門は非基礎部門でありそれほど重要なものではないので，ここでは生産財と消費財の二財で議論する。また，柴田の議論そのものは西 (2022a) で紹介したので，ここでは記号などは変更する。

柴田の議論は次のようなものであった。

最初に，生産財単位ではかった価値方程式を定義しておく。第一部門を生産財産業，第二部門を消費財産業とする。生産財を一単位生産するのに要する生産財の量をa_1，直接労働量をτ_1とし，消費財を一単位生産するのに要するそれぞれの量をa_2，τ_2とする。また，Rは実質賃金率である。

そして柴田は明示的には述べていないが，労働力の生産部門を考える。そうすると，柴田の資本価値体系は，

$$k_1 = a_1 k_1 (1 + m'') + \tau_1 k_3 \quad \cdots (1)$$
$$k_2 = a_2 k_1 (1 + m'') + \tau_2 k_3 \quad \cdots (2)$$
$$k_3 = R k_2 \quad \cdots (3)$$

$$V_k = 1 = k_1(1 + m") \quad \cdots (4)$$
$$m" = \frac{1 - k_1}{k_1} \quad \cdots (5)$$

というものになる（柴田（1953），41ページ）。

ここで，記号についていうと，k_1はGintis and Bowles（1981）の用語では生産財power（以下も同様に記す）の生産財価値，k_2は消費財の生産財価値，k_3は労働サービスの生産財価値，V_kは生産財サービスの生産財価値（これは価値基準であり1である），$m"$は生産財powerの剰余価値率である。ただし，柴田は部門間の剰余価値率均等を仮定している。

さて，個々の式について説明しておくと，（1）は生産財powerの生産財価値方程式であり，（2）は消費財の生産財価値方程式，（3）は労働サービスの生産財価値方程式，（4）は生産財のサービスの生産財価値方程式，（5）は生産財の剰余価値率の定義式である。

資本価値体系は以上のような体系となるが，これと対比して労働価値体系を書いておくと，

$$\begin{aligned} t_1 &= a_1 t_1 + R t_2 \tau_1 (1 + m') \\ t_2 &= a_2 t_1 + R t_2 \tau_2 (1 + m') \\ t_3 &= R t_2 \\ V_\ell &= 1 = R t_2 (1 + m") \\ m' &= \frac{1 - R t_1}{R t_1} \end{aligned} \quad \cdots (6)$$

となる（柴田（1953），33ページ）[2)]。

これは通例の労働価値体系でありt_1，t_2はそれぞれ生産財，消費財の労働価値，t_3は労働力の価値（これは先の資本価値論体系でいうならば生産財powerの価値と対応している）。Rは実質賃金率，m'は労働力の剰余価値率である。

さて，このようにして，どちらの体系からも同じ価格方程式を導くことができるというのが柴田の議論であった[3)]。

さて，この生産財価値体系，つまり（1）-（5）における搾取の問題について考える[4)]。（4）を（1），（2）に代入すると，

$$k_1 = a_1 + \tau_1 k_3 \quad \cdots (1')$$
$$k_2 = a_2 + \tau_2 k_3 \quad \cdots (2')$$

となる。両部門で利潤が発生していれば，

$$p_1 > a_1 p_1 + \tau_1 R p_2 \quad \cdots (7)$$
$$p_2 > a_2 p_1 + \tau_2 R p_2 \quad \cdots (8)$$

が成立していることとなる。ただしここでp_1，p_2はそれぞれ生産財，消費財の価格である。

ここで，周知のように剰余生産が可能な条件，つまり，

$$1- a_1 > 0, (1-a_1)(1-R\tau_2) - a_2 R\tau_1 > 0$$

あるいは，

$$1-R\tau_2 > 0, (1-R\tau_2)(1-a_1) - a_2 R\tau_1 > 0 \quad \cdots (9)$$

あるいは，

$$1-a_1 > 0, \quad 1-Rt_2 > 0$$

がみたされているものとする。

さて，(3) を (2') へ代入すると，

$$k_2 = a_2 + \tau_2 R k_2$$

となり，これを変形すると，

$$k_2 = \frac{a_2}{1-\tau_2 R} \quad \cdots (2'')$$

となる。この式を (3) に代入すると，

$$k_3 = \frac{a_2 R}{1-\tau_2 R} \quad \cdots (3')$$

となる。(3') を (1') に代入すると，

$$k_1 = a_1 + \frac{a_2 \tau_1 R}{1-\tau_2 R} \quad \cdots (1'')$$

となる。k_1，k_2，k_3を陽表的に表わすとこのようになる。

さて，(7) より，

$$\frac{p_2}{p_1} < \frac{1-a_1}{\tau_1 R} \quad \cdots (10)$$

他方，(9) より$1-R\tau_2 > 0$であるから，(8) の両辺を$1-R\tau_2$で割って変形すると不等号の向きはかわらず，

$$\frac{a_2}{1-\tau_2 R} < \frac{p_2}{p_1} \quad \cdots (11)$$

となる。(10)，(11) より，

$$\frac{a_2}{1-\tau_2 R} < \frac{1-a_1}{\tau_1 R}$$

となり，ここから，

$$1-a_1>\frac{a_2\tau_1 R}{1-\tau_2 R}$$

よって，

$$1>a_1+\frac{a_2\tau_1 R}{1-\tau_2 R}$$

となるが，この式の右辺は（1"）よりk_1である。よって，

$$1>k_1 \qquad \cdots(12)$$

となる。つまり，生産財は搾取されているということになる。逆，つまり搾取があれば利潤がある，は容易に証明できるので省略する。

もちろん柴田はあくまで転化論による対応関係を示したのであるが，それはともかく，ここでは「マルクスの基本定理」のもっともポピュラーな証明を適用して，二財モデルではあるが，労働搾取と同じ形で生産財の搾取が利潤の存在と同値であるという命題が証明できたということになる。

だが，なぜそのようになるのであろうか。それは，そもそも利潤は剰余生産可能性，つまり（9）式という技術的な条件の双対にすぎないからである，というのが以上の議論から出てくる見方である。

それでは，剰余が一つの財から生じるという論点についてはどうであろうか。次に考えよう。

Ⅲ　鷲田（1994）の議論

以上より，ある財が搾取されることが利潤が存在するための必要十分条件であることがわかった。

次に，鷲田（1994）における議論を参照しつつ，労働が搾取されていても財の価値を変化させることによって生産財でも価値的剰余が発生する（あるいはその逆もある）という問題を考える[5)]。

鷲田（1994）の議論の特徴は，どの部門に価値的剰余が生じるかはあくまで価値の相対比をどうとるかということに依存しているのであり，よって，労働力にのみ価値的剰余を生む能力があるという議論は成り立たないというものである。

（1）－（5）の生産財価値体系について考える。つまり，生産財生産に価値的剰余が生じているとする。（1'）と（12）より，

$$1>a_1+\tau_1 k_3 \qquad \cdots(13)$$

となる。k_2については（2'）より，

$$k_2=a_2+\tau_2 k_3 \qquad \cdots(2')$$

である。（3'）と（2"）より，

$$k_3=Rk_2 \qquad \cdots(14)$$

となる。これは生産財価値体系である。

さてここで，(2') が等式で成立していることを前提にして (14) が不等号になりうるかどうか，つまり $k_3 > Rk_2$ となるかを考える。

(2') を (13) と (14) に代入する。そうすると，

$$1 > a_1 + \frac{k_2 - a_2}{\tau_2}\tau_1 \qquad \cdots (13')$$

$$(1 - \tau_2 R)k_2 = a_2 \qquad \cdots (14')$$

となる。ここで (13') の不等号をみたす範囲で微少に (14′) の k_2 を増加させるとしよう。そうすると価値量が変化するが，それを $(1, k_2', k_3')$ とする。(9) より $1 - \tau_2 R > 0$ であったから，(14') は，

$$(1 - \tau_2 R)k_2' > a_2$$

となる。

つまり，労働において価値的剰余が生じるようになるのであり，生産財からも労働からも，どちらからも価値的剰余が発生するようにすることができるということになる。

今度は，労働価値体系を考え，そこで労働が搾取されていても生産財生産において価値的剰余が生じうることを示そう。

労働に価値的剰余が生じているとする。先の (6) の体系について同様に考える。そうすると，価値方程式の体系は生産財と消費財については，

$$t_1 = a_1 t_1 + \tau_1 \qquad \cdots (15)$$
$$t_2 = a_2 t_1 + \tau_2 \qquad \cdots (16)$$

となる。他方，労働力の価値は $t_3 = Rt_2$ であるが，それは労働が搾取されていれば 1 より小さいので，

$$1 > Rt_2 \qquad \cdots (17)$$

となる。

ここで，(16) が等式で成立していることを前提して (15) で価値的剰余が発生するかをみる。(16) を (15)，(17) に代入すると，

$$(1 - a_1)t_1 = \tau_1 \qquad \cdots (15')$$
$$1 > R(a_2 t_1 + \tau_2) \qquad \cdots (17')$$

となる。ここで，(17') の不等号をみたす範囲内で (15') の t_1 を微少に増加させてみる。そうすると，変化後の価値を $(t_1', t_2', 1)$ で表すと (9) より $1 - a_1 > 0$ であったから，

$$(1 - a_1)t_1' > \tau_1$$

となる。つまり，生産財に価値的剰余が生じるということになる。

以上のように，ある財に剰余が生じていたとしても価値量の比率を変化させることによって，別の財に剰余を生ぜしめることができる。

なぜそういうことになるのかといえば，どの財に価値的剰余が生じるかはあくまで価値量の比率に依存しているからであり，よって，特定財のみに価値的剰余を生む能力を認める見解は成り立たない，というのが以上の議論から出てくる見方である[6)]。

そして，その根底にあるのはやはり（9）式という経済の剰余生産能力である。よって以上の議論はそれが根本的な条件なのだということになる。

それでは労働以外の財の剰余によって利潤の存在を証明することは財の数が多くてもできるのであろうか。次にその問題について考える。

Ⅳ　Gintis and Bowles（1981）の資本価値論

次に，Gintis and Bowles (1981)，Appendix I における資本価値論についてみる。彼らは，柴田とは異なり搾取率均等を仮定せず，より一般的な前提から資本価値論を導いている[7)]。

n個の生産される財が存在する（労働力も生産される財に含まれる。労働力生産部門とはいうまでもなく労働者の消費過程である）。また，Gintis and Bowles (1981) 同様に，第 1 財はスラッファのいう基礎財 (Sraffa (1960)，邦訳12ページ) でありそれを価値基準財とする[8)]。

$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$をそれぞれの財の価値の行ベクトルとするが，第 1 財が基準財なので，以下，$\boldsymbol{\lambda}=(1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$とする。そして，第 1 財の能力 (power) の価値をv_1として，それが第 1 要素に入っている行ベクトルを$\boldsymbol{v}=(v_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$とする。

$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$はそれぞれの財の価格を表わす行ベクトルであるとするが，これは後に再定義される。さらに$\boldsymbol{I}$は$n\times n$次元の産出行列であり，単一生産物体系なので単位行列（(i,j)要素は$i=j$ならば 1，≠ならば 0）である。

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$をそれぞれの財の総生産量を表わす列ベクトル（なお，ここでプライムはベクトルの転置を表わす。以下同様)，wはそれぞれ貨幣賃金率（すべての産業で均等）である。$\boldsymbol{A}$はa_{ij}（行列の (i, j) 要素は，j 財を一単位生産するのに必要な i 財の量を示す）をその要素にもつ投入係数の$n\times n$次元の正方行列で非負行列である。つまり，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

である。なお，通例，労働力を生産するのに直接労働は投下されないのでその部門の当該要素は 0 になると考えられるが，労働投入は$\boldsymbol{A}$のなかに含まれているとしよう[9)]。

この体系において価値方程式は，

$$\boldsymbol{v}=\ \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{A} \qquad \cdots (18)$$

となる[10)]。また，価格方程式は$\alpha=1/(1+\mathrm{r})$と定義すれば，

$$\alpha\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}\boldsymbol{A} \qquad \cdots (19)$$

と書ける。ただしここでrは利潤率を表わす。

さて，利潤があれば第一財が搾取されていることを示す。利潤が正であると仮定しよう。そうすると，(19) より$\boldsymbol{A}$は生産的であるのでその双対体系においてすべての産業で剰余生産が可能となる，つまり，

$$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \cdots (20)$$

となるような$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$が存在する[11)]。

さて，(20) の両辺に左から$\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}$を掛けると，

$$\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \cdots (21)$$

となる。(18) の両辺に右から$\boldsymbol{x}$を掛けると，

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \cdots (22)$$

となる。ところで，(21) と (22) の右辺はどちらも$\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{x}$の二次形式でスカラー量であり ($\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\lambda_i)x_j$)，左辺はどちらも内積である。(21) と (22) から得られる式を具体的に書くと，

$$x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n > v_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$$

となる。この式より，

$$(1 - v_1)x_1 > 0$$

となる。ところで，$x_1 > 0$だったので，

$$1 > v_1$$

となる。つまり，第 1 財は搾取されている。

逆に，$1 > v_1$とする。いうまでもなく，

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{v} \quad \cdots (23)$$

である。(23) の両辺に左から$\boldsymbol{A}$を作用させると，

$$\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{v}\boldsymbol{A} \quad \cdots (24)$$

となるが，ここで$\boldsymbol{p} = \sigma\boldsymbol{v} = \sigma(v_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$とおく。ただしここで$\sigma$は任意の正の定数である[12)]。そうすると，

$$\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{A} \geq \frac{\boldsymbol{1}}{\sigma}\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}$$

となるが，(18) を考慮すると，

$$\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{pA}$$

となる。これより，非負行列についてのフロベニウスの定理により$\boldsymbol{A}$は非負の固有値と非負の固有ベクトル$\boldsymbol{p}$をもつ。またその固有値は 1 より小さい[13]。固有値は$1/(1+\mathrm{r})$なので，

$$1 > \frac{1}{1+\mathrm{r}}$$

となる。よって，

$$\mathrm{r} > 0$$

つまり，第 1 財が搾取されていれば利潤率は正である。

以上が，Gintis and Bowles (1981) の証明の大まかなところである。今は第 1 財を価値基準財としたが，行と列を入れ替えれば基礎財である限り同様の証明が成り立つであろう。つまり，さまざまな財が価値的剰余を生みうるということである。

もちろん，彼らの証明では，はじめから第 1 財が価値的剰余を生むような定義，前提がおかれている。しかし，第 1 財が労働力におきかえられても同じである，というのが彼らの言いたいことなのであろう。

しかしいずれにしても，議論の根底にあるのは経済が剰余生産の能力を有しているということであり，それはこれまでの議論と同様である。

なお，Roemer (1982)，Roemer (1986) や松尾 (2014) はギンタス＝ボールズよりもより簡明な証明をしているが，それについては【補論】で述べる[14]。

Ⅴ　資本価値論が提起するもの

さて，これまで柴田が述べた議論と鷲田の議論，それにギンタス＝ボウルズの議論をみてきた。以上の議論から何が読みとれるであろうか。

第一に，価値的剰余がどの財に生じるかは価値の取り方に依存しているのであり，その根底にあるのは物量体系における剰余生産可能条件という技術的な要因だということである。それさえみたされればいかなる財でも価値的剰余を生みうるし，生産量の比率を調整すれば剰余生産物を生みうる。

第二に，そのような特定財の剰余が利潤の源泉というのではなく，やはりこれも剰余生産可能条件という，生産技術が一定程度の効率性をもつということの双対として利潤は現れるのだということである[15]。

第三に，価値論というものは唯一というものはなく，そもそもが相対的なものであるということである。経済学の歴史において土地価値論や労働価値論などが提起されてきたことは周知のことである[16]。

鷲田 (1994) によれば，価値とはその時代の価値観を前提にするものであり，時代がかわれば (たとえば農業社会から工業社会へといった)，経済状態や人々の価値観も異なってくることの結果として主流価値論も変化する。

たとえば，鷲田 (1992) では「目的によって生じる経済的対象に対する評価体系を価値あるいは価値体系と呼ぶ」(鷲田 (1992)，63ページ) と述べられている。あるいは，別のところでは，江戸時代の石高制に

ついて論じながら,「一般に，ある財が価値基準財であるとは，その財に対する主観的な価値評価が，日時が変わっても，あるいは場所が変わっても，人々の間で大きな差異がなく安定していると判断されることを意味している」,「人々のその財に対する評価が主観的安定性をもつものに価値基準財の資格が与えられるのである」,「価値基準財とは，共同体が与える共感によって規定されるものなのである」(鷲田(1994)，231ページ) などと述べられている[17]。

さらには，第四には本稿では述べることができなかったが，価値論は価格論と切り離し，むしろ通常の価格では評価されないような部分に適用されるべきだという考え方がでてくる。価値を価格規制論に用いるのではなく，ある生産要素などが希少性をもつとか重要性をもつ場合に，それを効率的に利用するための一つの基準を提示するために価値論が使われるべきではないか，ということである。

たとえば，生産技術の選択を考える場合，より高い利潤率を達成するような技術が選ばれるのが資本主義においては一般的であると考えられる。だが，そのような技術は，個々の生産者にとっては合理的ではあるが社会的な希少資源の節約，有効利用という意味での合理性をみたすとは限らない。

またそのような希少資源は，資本主義においては自由財として扱われ社会の安定的な持続性という観点からは必ずしも適当な価値的評価が行われない場合がある。そのような場合にはその資源にそれを守るに適切な価値を帰属させてその節約，有効利用を考える必要が出てくるのであるが，そのために価値論が有効になりうる，ということである[18]。

この観点から考えると，価値を価格の規定要因として考えるということはむしろ価値論が果たすべき独自の役割を無視することとなろう。

以上のようなことが，価値論を考える際に考慮されるべきであるということになる。

Ⅵ　おわりに

以上のように，柴田，鷲田，ギンタス＝ボールズの問題提起をうけて資本価値論，あるいは労働価値論以外の価値論の可能性についてみてきた。

だが，それでは現代において，価格論とは区別された価値論なるものに如何なる積極的な意味を見出すことができるのであろうか。それについて論じることが次の課題となる。

【補論】「一般化された商品搾取定理」の他の証明

この補論においては，本文でとりあげることのできなかった他の証明について紹介しておく。なお，いずれもよく知られているものなのでいまさら理論に詳しくない筆者がするべき作業ではないかもしれないが，一応，自分なりに理解したものを紹介しておく。

まずはJ.レーマーによる証明である。Roemer (1982) のAppendix6.1，Roemer (1986)，pp.24–27においては次のように証明されている。なお以下の定義については本文と同じとする。なお，レーマーは賃金の式を他の式に代入することにより賃金を消去しているが，そのことは以下の問題に影響しない。それは本文注9より明らかであろう。

さて，価値方程式は先と同様に，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\lambda A} \qquad \cdots (18)$$

となるが，今，$\boldsymbol{A}$の第1行目をとりだした行ベクトルを$\boldsymbol{A_1} = (a_{11}, \cdots, a_{1,n})$と定義し，それに$v_1$を掛けたものを加えて引くという操作をする。そうすると，細かく書けば，

$$(v_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=(1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n,1}&\cdots&a_{n,n}\end{pmatrix}$$
$$=\left(a_{11}+a_{21}\lambda_2+\cdots+a_{n,1}\lambda_n,\cdots,a_{1,n}+a_{2,n}\lambda_2+\cdots+a_{n,n}\lambda_n\right)$$
$$+v_1\left(a_{11},\cdots,a_{1,n}\right)-v_1\left(a_{11},\cdots,a_{1,n}\right)$$
$$=\left(a_{11}v_1+a_{21}\lambda_2+\cdots+a_{n,1}\lambda_n,\cdots,a_{1,n}v_1+a_{2,n}\lambda_2+\cdots+a_{n,n}\lambda_n\right)$$
$$+\left(a_{11},\cdots,a_{1,n}\right)-v_1\left(a_{11},\cdots,a_{1,n}\right)$$
$$=(v_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n,1}&\cdots&a_{n,n}\end{pmatrix}+(1-v_1)\left(a_{11},\cdots,a_{1,n}\right)$$

となる。行列で書くと，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{vA}+(1-v_1)\boldsymbol{A_1} \qquad \cdots\text{(a)}$$

となる。

さて，(a) より，

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(1-v_1)\boldsymbol{A_1}$$

であるが，$\boldsymbol{A}$は生産的なので，

$$\boldsymbol{v}=(1-v_1)\boldsymbol{A_1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} \qquad \cdots\text{(b)}$$

となる。ここでもし，$v_1=1$ならば (b) より$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$となり，$v_1=1$の仮定に反する。ゆえに，$v_1\neq 1$であり，よって，(b) は，

$$\frac{\boldsymbol{v}}{1-v_1}=\boldsymbol{A_1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} \qquad \cdots\text{(c)}$$

となる。ここでかりに$\boldsymbol{A}$が生産的ならば，$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\geq\boldsymbol{0}$，そして$\boldsymbol{v}/(1-v_1)\geq\boldsymbol{0}$となる。このことは$1>v_1$を意味し，(c) に$\boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0}$という解が存在する。

逆に，もし (a) を解くことによって得られる非負のベクトル$\boldsymbol{v}$が存在し，かつ$1>v_1$ならば$\boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{vA}$，となり，よって$\boldsymbol{A}$は生産的になる (Roemer (1982)，pp.186–188)。なお，中谷 (1994)，94–95ページも参照。

次に，Matsuo (2009) における証明について。そこでは，ホーキンス・サイモン条件が用いられている。また，ギンタス＝ボールズやローマーのように第１財を価値基準財に選んでいないが行と列を入れかえれば同じことが成り立つので，Matsuo (2009) にしたがい最後の財（第ｎ財）を価値基準に選ぶ。また最初に労働力が第n財だったとすれば，それとたとえば第k財を入れ替えるとし，その行列をあらためて$\boldsymbol{A}$と定義しよう。

定義であるが，$\boldsymbol{A}$のうち第ｎ行ｎ列をとりのぞいた行列を$\boldsymbol{A_{n-1}}$とする。いうまでもなく，

$$\boldsymbol{A_{n-1}}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n-1}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n-1,1}&\cdots&a_{n-1,n-1}\end{pmatrix}$$

となる。そして，$\boldsymbol{I_{n-1}}$を$(n-1)\times(n-1)$の単位行列とする。また，$\boldsymbol{A}$の第ｎ行の第ｎ－１列まででできる行ベクトルを$\boldsymbol{a_0}=(a_1,\ \cdots,\ a_{n,n-1})$，第ｎ列の第ｎ－１行まででできる列ベクトルを$\boldsymbol{a^0}=(a_{n,1},\ \cdots,\ a_{n,n-1})'$で表わす。そうすると，$\boldsymbol{A}$は，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A_{n-1}}&\boldsymbol{a^0}\\ \boldsymbol{a_0}&a_{n,n}\end{pmatrix}$$

と書ける。

さて，利潤の存在は$\boldsymbol{A}$がホーキンス・サイモン条件をみたすこととイコールである。よって，以下その

ことが仮定される。

ところで，行列式の公式から$\boldsymbol{I_{n-1}}-\boldsymbol{A_{n-1}}$が正則であれば$|\mathbf{I}-\mathbf{A}|$は，

$$|\mathbf{I}-\mathbf{A}|=|\boldsymbol{I_{n-1}}-\boldsymbol{A_{n-1}}|\left|1-a_{n,n}-\boldsymbol{a_0}(\mathbf{I}-\boldsymbol{A_n})^{-1}\boldsymbol{a^0}\right|$$

となることがわかっている（佐武（1974），66ページ）。$\boldsymbol{I_{n-1}}-\boldsymbol{A_{n-1}}$は$\mathbf{I}-\mathbf{A}$がホーキンス・サイモン条件をみたすという前提であるからみたされ，その行列式は0ではないので正則である。よって，このように上記の体系は表すことができる。

ここで，この右辺の式の行列式の第二項が第n財の搾取を表わしているというのがMatsuo（2009）の証明の特徴である。

さて，この右辺の式の括弧の中の$a_{n,n}+\boldsymbol{a_0}(\mathbf{I}-\boldsymbol{A_n})^{-1}\boldsymbol{a^0}$は第n財powerのn財価値となるのであるが，それは次のように考えればわかる。

いま，$\boldsymbol{\lambda_n}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})$という$n-1$次元の行ベクトルを定義し，$\boldsymbol{\lambda_n}=\boldsymbol{a_0}(\mathbf{I}-\boldsymbol{A_n})^{-1}$とおくと，ここから，

$$\boldsymbol{\lambda_n}=\boldsymbol{\lambda_n}\boldsymbol{A_n}+\boldsymbol{a_0}$$

となる。つまり，第1財から$n-1$財までのn財価値を定義する式となる。

次に，$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1},1)$（本文の$\boldsymbol{\lambda}$の定義とは異なり第n財を価値基準にとったもの），$\boldsymbol{v}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1},v_n)$（同様に，本文の$\boldsymbol{v}$の定義とは異なり第n財を価値基準にとったもの）というn次元の行ベクトルを定義する。そうすると，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\lambda}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A_{n-1}} & \boldsymbol{a^0}\\ \boldsymbol{a_0} & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

となる。このうちv_nの式だけをとりだすと，

$$\begin{aligned}v_n &= \boldsymbol{\lambda}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a^0}\\ a_{n,n}\end{pmatrix}\\ &= \boldsymbol{\lambda_n}\boldsymbol{a^0}+a_{n,n}\\ &= \boldsymbol{a_0}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{a^0}+a_{n,n}\end{aligned}$$

となるからである。

ところで，前提より$|\mathbf{I}-\mathbf{A}|>0$，$|\boldsymbol{I_{n-1}}-\boldsymbol{A_{n-1}}|>0$であったから$1>v_n$，つまり新第n財（旧第$k$財）が搾取されているということになる。適当に行と列を入れ替えるならばどの財についても成り立つということになる。

ただし，ホーキンス・サイモン条件を前提しないならば，$\boldsymbol{A}$が分解不能であるか，$\boldsymbol{a_0}>\boldsymbol{0}$かつ$\boldsymbol{a^0}$の要素に少なくとも一つ正の要素があることが必要となるようである。

搾取⇒利潤の存在はホーキンス・サイモン条件から自明であろう。

ただし，Matsuo（2009）においては，そのような行列の双対として導かれる純生産物の概念に疑問が呈されている（松尾（2014）も参照）。

注

1）柴田の資本価値論については柴田（1953a），Shibata（1954），また，それと関連するものとして柴田（1953b），（1954），あるいは柴田（1987），188ページを参照。柴田の資本価値論はC. Snyder（1940）から示唆を得ているということについては西（2022）。なお，いわゆる「マルクスの基本定理」については，置塩（1965），Okishio（1993），Morishima（1973），Morishima and Catephores（1978）を参照。

2）柴田がこのような価値方程式や価格方程式を用いて価値と価格との関係を分析したのは柴田（1933a），（1933b），（1935）においてであった。

3）以上のような柴田のアプローチはSamuelson (1982) のそれと同じである。
4）なお以下は，松尾 (2022)，216-217ページを参考にしている。
5）以下の展開は鷲田 (1994)，178-180ページを参照した。そこにおいては労働と労働力との区別などは明示的にはなされていない。鷲田 (1994) においては，たとえば柴田が$K''(1+m'')$と表わしているものはv_1であり，$k_1(1+m'')=1>k_1=a_1k_1(1+m'')+\tau_1k_3$となっているということである。つまり，鷲田 (1994) はk_1を明示的には示していないということになる。
6）それでは価値量の比率はどのようにしてきまるのか，という問題があるが，それは鷲田 (1992)，(1994)，(1996) という一連の著作のテーマである。だが，この問題を論じるためにはさらに一稿を要するのであり，ここでは議論することはできない。さてそれはともかく，すべての財が利潤の発生にかかわっているとする議論として藤田 (2009)，Fujita (2021) がある。ただしそこでは，生産における価値的剰余はあくまで労働も含めて生産要素の効率的利用の指標と考えるべきであり，搾取はあくまで交換過程において労働のみに生じるものだという見解が述べられている。
7）村上 (1966)，86ページにおいて置塩 (1965) の49ページの記述を指して，労働以外の財でも同様の分析ができると指摘されているが，置塩 (1965) のそのページの特に (4) 式をみてみると，村上 (1966) の念頭にあった分析がGintis and Bowles (1981) のそれと同様であったであろうことは明白である。
8）いうまでもなく，基礎財とはすべての財の生産に直接間接に入りこむ財のことである。基礎財については次のことが知られている。n個の財を基礎財とそうでないものに分け，基礎財の数はm個とするというまでもなく残りのn－m個は非基礎財になる。そうすると，グループ分けをすれば，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{12}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A_{22}}\end{pmatrix}$$

となる。ここで，$\boldsymbol{A_{11}}$は$\mathrm{m}\times\mathrm{m}$の正方行列で，$\boldsymbol{A_{12}}$は$\mathrm{m}\times(\mathrm{n}-\mathrm{m})$，$\boldsymbol{A_{22}}$は$(\mathrm{n}-\mathrm{m})\times(\mathrm{n}-\mathrm{m})$の行列となる。$\boldsymbol{A}$は分解可能であるが$\boldsymbol{A_{11}}$は分解不能である。よって，$\boldsymbol{A_{11}}$については非負行列についてのより強い諸結果が得られる。なお，基礎財と搾取等の関係については中谷 (1994)，94-95ページ，吉原 (2009)，17ページを参照
9）$n+1$番目の財が労働だとしよう。そしてその価格をp_{n+1}とする。なお，通常，労働力の生産に労働が直接投入されることはないので$a_{n+1,n+1}=0$であるが，一般性をも期すため0でないとしておく。また，労働力商品は利潤がついて販売されることはないので不等号ではなく等号で成立するが，そのような事情も捨象する。そして，

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{a^{n+1}}\\ \boldsymbol{a_{n+1}} & a_{n+1,n+1}\end{pmatrix}$$

というように行列$\boldsymbol{A}^*$を定義し，それを四つの区画に分解する。ただしここで$\boldsymbol{a_{n+1}}=(a_{n+1,1},\cdots,,a_{n+1,n})$，$\boldsymbol{a^{n+1}}=(a_{1,n+1},\cdots,a_{n,n+1})'$である。

価格不等式は，

$$\boldsymbol{p}^*>\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{A}^*$$

となる。ただしここで，$\boldsymbol{p}^*=(p_1,p_2,\cdots,p_n,p_{n+1})$である。

さて，ここで$n+1$番目の式は，

$$p_{n+1}>a_{1,n+1}p_1+\cdots+a_{n+1,n+1}p_{n+1}$$

であるが，$1-a_{n+1,n+1}>0$を仮定してp_{n+1}について解くと，符号はそのままで，

$$p_{n+1}>\frac{1}{1-a_{n+1,n+1}}(a_{1,n+1}p_1+\cdots+a_{n,n+1}p_n)$$

となる。これと，たとえば一番目の式，つまり

$$p_1>a_{11}p_1+\cdots+a_{n+1,1}p_{n+1}$$

を比較すると，

$$p_1>a_{11}p_1+\cdots+a_{n,1}p_n+a_{n+1,1}[\frac{1}{1-a_{n+1,n+1}}(a_{1,n+1}p_1+\cdots+a_{n,n+1}p_n)]$$

$$=(a_{11}+\frac{1}{1-a_{n+1,n+1}}a_{1,n+1}\cdot a_{n+1,1})p_1+\cdots+(a_{n,1}+\frac{1}{1-a_{n+1,n+1}}a_{n,n+1}\cdot a_{n+1,1})p_n$$

となるであろう。同様にして，2からn番目の式と比較していくと，

$$(p_1,\cdots,p_n)>(p_1,\cdots,p_n)[\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}+\frac{1}{1-a_{n+1,n+1}}\begin{pmatrix}a_{1,n+1}\\ \vdots\\ a_{n,n+1}\end{pmatrix}(a_{n+1,1},\quad\cdots,\quad a_{n+1,n})]$$

$$=(p_1,\cdots,p_n)[\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}+\frac{1}{1-a_{n+1,n+1}}\begin{pmatrix}a_{1,n+1}\cdot a_{n+1,1} & \cdots & a_{1,n+1}\cdot a_{n+1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,n+1}\cdot a_{n+1,1} & \cdots & a_{n,n+1}\cdot a_{n+1,n}\end{pmatrix}]$$

$$= (p_1, \cdots, p_n)\begin{pmatrix} a_{11} + \frac{1}{1-a_{n+1,n+1}} a_{1,n+1} \cdot a_{n+1,1} & \cdots & a_{1,n} + \frac{1}{1-a_{n+1,n+1}} a_{1,n+1} \cdot a_{n+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + \frac{1}{1-a_{n+1,n+1}} a_{n,n+1} \cdot a_{n+1,1} & \cdots & a_{n,n} + \frac{1}{1-a_{n+1,n+1}} a_{n,n+1} \cdot a_{n+1,n} \end{pmatrix}$$

となる。これはいうまでもなく行列で書くと,

$$\boldsymbol{p} > \boldsymbol{p}[\boldsymbol{A} + \frac{1}{1-a_{n+1,n+1}} \boldsymbol{a}^{\mathbf{n+1}} \cdot \boldsymbol{a}_{\mathbf{n+1}}]$$

となる。ただし，ここでの$\boldsymbol{p}$は本文で定義されているものである。

さて，ここであらためて

$$a_{ij} + [\frac{1}{1-a_{n+1,n+1}}] a_{i,n+1} \cdot a_{n+1,j} \quad , \qquad i,j = 1, \cdots, \mathrm{n}.$$

をa_{ij}と定義しなおせば，ここでの表記に達する。なお，$\boldsymbol{A}$の分解不能性を仮定しないならば，$1 - a_{n,n} > 0$で$\boldsymbol{a}_{\mathbf{n}} = (a_{n,1}, \cdots, a_{n,n-1}) > \mathbf{0}$（ゼロ行ベクトル），そして$\boldsymbol{a}^{\mathbf{n}} = (a_{1,n}, \cdots,, a_{n-1,n})'$のなかに正の要素がなければならない。もしそのような財があれば，その番号の行の要素はすべて正となりそれは基礎財である。置塩(1965)，81-82ページ，吉原(2009)，17ページも参照。

10）この式の諸変数の決まり方について述べておくと，v_1は第一式にしかあらわれないので，他の式で$\lambda_2, \cdots, \lambda_n$が決まり，それが第一式に入って$v_1$が決定されるということになる。よって，$v_1$の非負性は$\lambda_2, \cdots, \lambda_n$の非負性のみに依存していることになる。さて，$\lambda_2, \cdots, \lambda_n$の非負性は$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$から第一行と第一列をとり除いた行列の行列式のホーキンス・サイモン条件に依存するが，それは$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$のホーキンス・サイモン条件によって保証されている。よって，v_1は非負になる。

11）この点については塩沢(1981)，78ページ，中谷(1994)，92ページを参照。

12）Gintis and Bowles (1981) においては$\sigma = 1$とされている。

13）(19) の両辺に右から$\boldsymbol{x}$を掛け，(20) の両辺に左から$\boldsymbol{p}$を掛けると，

$$\boldsymbol{px} > \boldsymbol{pAx} = \alpha \boldsymbol{px}$$

となるので，$1 > \alpha$。

14）なお，吉原(2009)は，一般化された商品搾取定理についての一連の論争から導かれた諸原則についてまとめている（吉原(2009)，15-19ページ）。

15）村上(1966)において，置塩の分析について「要は形式的分析の限界という点にある」（村上(1966)，87ページ）と指摘されている。これは，形式的分析からは特定価値論の妥当性を明らかにすることはできず，そこからはなぜ特定価値論でなければならないのかについての意味づけが重要となる，ということであろう。ここから，置塩の体系をどのように進めていくかについて，見解が分かれていった。鷲田(1994)等はむしろ特定価値論にこだわらず歴史的な視点をいれて相対化するという道を選択し，松尾(2014)等は逆に，労働価値論にこだわって置塩の敷いた道を進むことを選択しているようである。なお，一般化された商品搾取定理については松尾匡と吉原直毅との間に論争があった。それについては松尾(2004)，(2007)，(2014)，吉原(2005)，(2008)を参照。なお，この論争以前の段階でのマルクスの基本定理についての論争の主要争点については高増(1994)を参照。

16）たとえば，それだけでなく，19世紀においてすでにセリイ・ポドリンスキー（Serhii Podolinsky, 1850-1891）によってエネルギー価値論が提起されたことがある。エネルギー価値論の歴史についてはMartines-Alier (1987)を参照。

17）かつては，経済学史において客観的価値論が主観的価値論に対立させられ，前者の優位性が指摘されることがしばしばあった。だが，鷲田(1994)にしたがえば，そもそも主観的な評価から離れた価値論などというものはありえないということになる。価値とはある時代において人々が何を大切に考えるかということの共同意識の反映なのである。価値尺度財の価値が1とおかれうるのも，それが自由財のようなものにならないことが社会から認められているからであろう。また，鷲田(2021)，104-107ページにおいては，マルクスが存在している価値を客観的なものとみてそれが市場での交換比率を規定するという点を重視する面と，価値を共同主観的なものとしてとらえ，それを自由時間の最大化という点から考察する面とがあることが指摘されている。

18）たとえば鷲田(1992)においては，経済体系の外部から投入される資源の価値の例をとりあげ，資源価値で測った費用を下げるような技術の選択は同じだけの生産を行うための資源投入量を減少させることが明らかにされている。また，結合生産が存在する場合には線形計画問題における資源投入量を最小にする問題の双対として最終需要のその資源価値が最大になるようにそれぞれの投入要素に価値が帰属されることが示されている。そして，生産資源の剰余条件は資源の効率的利用のための技術の評価に用いられている。結合生産の場合における資源投入量最小化問題についてはMorishima (1973)，Morishima and Catephores (1978)を参照。

参考文献

柴田敬（1933 a）「平均利潤論」『経済論叢』36（2）：81-104ページ。
柴田敬（1933 b）「平均利潤再論」『経済論叢』36（5）：113-137ページ。
柴田敬（1935）『理論経済学（上）』弘文堂。
柴田敬（1953a）『資本主義世界経済論・上―経済学は「逆立ち」している―』三和書房。
柴田敬（1953b）「岡倉学士の論文「労働価値説か資本価値説か」を読む」『山口経済学雑誌』4（5・6）：83-99ページ。
柴田敬（1954）「労働価値説の徹底的考察」『山口経済学雑誌』4（7・8）：1-19ページ。
柴田敬（1987）『増補　転換期の経済学』日本経済評論社（1978年初版）。
Shibata, K., (1954) *A Dynamic Theory of the World Capitalism*, Sanwa Shobo.
置塩信雄（1965）『資本制経済の基礎理論』創文社。
佐武一郎（1974）『線型代数学』裳華房。
塩沢由典（1981）『数理経済学の基礎』朝倉書店。
高増明（1994）「マルクスの基本定理について」『大阪産業大学論集　社会科学編』95：21-32ページ。
竹内靖雄（1962）「利潤率と実質賃金率」玉野井編著（1962）所収，第二部Ⅱ節。
玉野井芳郎編著（1962）『価格理論の再検討』青木書店。
藤田之彦（2009）「全商品剰余定理とマルクスの基本定理」『福岡大学経済学論叢』53（3・4）：79-100ページ。
中谷武（1994）『価値，価格と利潤の経済学』勁草書房。
西淳（2022）「経済学と価値論―柴田敬の価値論研究」『阪南論集　社会科学編』58（1）：311-324ページ。
松尾匡（2004）「吉原直毅氏による「マルクスの基本定理」批判」『季刊　経済理論』41（1）：57-62ページ。
松尾匡（2007）「規範理論としての労働搾取論―吉原直毅氏による「マルクスの基本定理」批判再論―」『季刊　経済理論』43（4）：55-67ページ。
松尾匡（2014）「物象の世界と人間の世界の二重の把握―労働価値概念純化への置塩の道を進めて」『季刊　経済理論』50（4）：42-59ページ。
松尾匡編著（2021）『最強のマルクス経済学講義』ナカニシヤ出版。
村上泰亮（1966）「（書評）置塩信雄『資本制経済の基礎理論』」『季刊　理論経済学』16（3）：86-87ページ。
吉原直毅（2005）「再論：70年代マルクス派搾取理論再検証」『季刊　経済理論』42（3）：63-75ページ。
吉原直毅（2008）『労働搾取の厚生理論序説』岩波書店。
吉原直樹（2009）「『労働搾取の厚生理論序説』についての幾つかの補論」https://www.ier.hit-u.ac.jp/~yoshihara/papers.html.
鷲田豊明（1992）『環境とエネルギーの経済分析―定常循環系への課題―』白桃書房。
鷲田豊明（1994）『エコロジーの経済理論』日本評論社。
鷲田豊明（1996）『環境と社会経済システム』勁草書房。
鷲田豊明（2021）「現代古典派経済学」http://toyowa.blogspot.com/p/blog-page_7.html.
Fujita,Y. (2021) On the All Commodities Surplus Theorem, *Economic Bulletin*, 41 (2) : 276-272.
Gintis, H and Bowles, S. (1981) Structure and Practice in the Labor Theory of Value, *The Review of Radical Political Economcs*, 12 (4) : 1-26.
Martinez-Alier, J. (with Klaus Schüpmnn) (1987) *Ecological Economics-Energy Eivironment and Society*, Blackwell Publishers（工藤秀明訳『〔増補改訂新版〕エコロジー経済学　もうひとつの経済学の歴史』新評論，1999年）。
Matsuo, T. (2009) Generalized Commodity Exploitation Theorem and the Net-Production Concept, *Bulletin of Political Economy*, 3 (1) : 1-11.
Morishima, M. (1973) *Marx's Economics*, Cambridge University Press（高須賀義博訳『マルクスの経済学』，東洋経済新報社）。
Morishima, M, and Catephores, G. (1978) *Value, Exploitation and Growth*, McGraw-Hill（高須賀義博，池尾和人訳『価値・搾取・成長』創文社，1980年）。
Okishio, N. (1993) *Essays on Political Economy*, M, Krüger and P, Flaschel (Eds.), Peter Lang Verlag.
Roemer, J, E. (1982) *A General Theory of Exploitation and Class*, Harvard University Press.
Roemer, J, E. (1986) *Value, Exploitation and Class*, Harwood Academic Publishers.
Samuelson. (1982) The Normative and Positivistic Inferiority of Marx's Value Paradigm, *Southern Economic Journal,* 49 (1) : 11-18.
Sraffa, P. (1960) *Production of Commodities by means of Commodities, Prelude to a Critique of Economic Theory,*

Cambridge University Press（菱山泉，山下博訳『商品による商品の生産』有斐閣，1962年）。

（2022年11月18日掲載決定）