〔論　文〕

新聞売り子問題の解の性質と２つの発注期間に対する解法

青　木　博　明

Ⅰ　はじめに

新聞売り子の問題とは，需要が確率的でかつ販売期間を過ぎると財の価値が下がる状況における最適在庫の問題である。この新聞売り子の問題は Hadley and Whitin（1963）によってより実践的な複数財かつ資源制約下での問題へと拡張され，その後多くのモデルと解法が示されてきた。資源制約下での新聞売り子問題についていえば，例えば Lau and Lau（1996）では専門的なソフトを使って，複数の資源制約下の問題に関する計算処理を行っている。Erlebacher（2000）では需要の確率分布が特殊な場合において最適解を求める手順を示し，またそれを確率分布が一般的な場合におけるヒューリステックな手法として採用している。Abdel-Malek et al.（2004），Abdel-Malek and Montanari（2005）では累積確率分布に対するテイラー展開による線形近似を繰り返すことによって解に近づく方法を示している。

これらを含む多くの文献で，資源制約下での新聞売り子問題の解を得る手順・解法について論じられてきているが，そこで得られる解が持つ特徴と傾向については，まったくと言ってよいほど論じられていない。本稿では，これまので研究と違い，十分多い財の数について計算結果を検証することによって，この問題を論じる。その結果，次のような資源制約下での新聞売り子問題に特徴的な所見を得た。それは，財の仕入値の上昇に伴って，当然最適な在庫量は減って行くのだが，ポアソン分布，正規分布などの一般的な確率分布の下では，ある程度需要の期待値が大きいと，最適在庫量がある時点で急に 0 になる，ということである。これを本稿では“急落現象”と呼んでいる。実際に整数解を考えた場合には，0 の近くに解はほとんど見つけられないということになる。この特徴は売値の上昇や資源量の減少などのパラメータの変化に対しても見られる。しかし資源制約が無効な場合にはこの現象は現実にはまず現われてこない。この急落現象の理論的説明も行う。

在庫管理の手法として ABC 分析がよく知られている。この在庫管理方法は各財への使用金額や売上金額などで財を降順に並び替え，その累積値を基準に重点的に在庫管理する財を絞り込んでいく手法である。簡便で直観的に妥当な手法であるが，理論的根拠は必ずしも明確ではない。本稿で論じる急落現象も，在庫する財の数を絞り込んでいくわけだが，その点で ABC 分析との類似性が見られ，その一つの根拠を示したと考える。

本稿では，まず財の需要の確率分布が既知のときの，複数財かつ資源制約下での最適在庫量を導くアルゴリズムを示し，その後それをプログラムに移し変え，十分に多い数の財に対する数値計算を行っている。その後，各パラメータの値を変化させながら解の変化を見，解の性質を検証している。専門的なソフトは使わず，現在誰もが簡単に手に入れることのできる Excel VBA（Microsoft Excel 2007）によってプログラムを作成している。

またこのアルゴリズムを利用することで，発注期間が異なる2つの財のグループの間での資源配分の問題も解いている。グループに属する財の数には特に制限がない。解と同時に得られる資源のシャドー・プライスを利用することで，これが可能になる。Chern et al.（1991）では在庫スペースの制約下で発注期間の異なる財に関する最適な在庫システムを扱っているが，需要が確定的な場合のヒューリステックな手法である。Choi et al.（2005）では需要が確率的なモデルで発注期間が異なるときの在庫問題を動的計画法で扱っているが，これもヒューリステックな方法に関する分析であり，財の数が2もしくは3と少ない。

さて，上で述べたように，新聞売り子の問題の基本的な前提は，“新聞”のように販売期間を過ぎると財の価値が下がる，言い換えれば，財が陳腐化し消費期限を持つ，もしくは売れ残り分が仕入値未満の価格で返品される，ということであった。ところが，資源制約が有効に働くとこの前提が取り払われることになる。いわば，新聞売り子の問題が“新聞”以外の一般の財を扱えるようになるわけである。このことは数式から簡単に導き出せるが，新聞売り子の問題の対象となる財が一般の財に拡張されることを意味し，重要な点である。この点についても計算例を示している。

本稿では資源として在庫及び陳列スペース（以後，その合計を在庫スペースと考える）を念頭においている。コンビニエンス・ストアーやスーパー・ストアーは現代社会を代表する小売形態だが，そこでは在庫及び陳列スペースが大きな資源制約となっている。その意味で，本稿で扱う問題は今日的であるといえる。

Ⅱ　モデルと最適条件

ある販売期間において期待利潤を最大にする在庫量を考える。複数の財を対象とし，資源制約を考える。単期間モデルである。資源制約としては在庫スペースを念頭においているが，資金の制約などを考えることもできる。

通常，各財に対して売値，仕入値が対応するわけだが，さらに売れ残った分の価格と売切れに対するペナルティとしての費用を考える。最後の二つの項目のうち，前者は仕入れ元が売れ残り分を買い戻すときの価格，後者は，品切れによって生じる，販売先への賠償金（もしあるとすれば）や信用へのダメージ，顧客のその後の需要行動へのマイナスの影響などを費用として数値化したものなどと考えることができる。第 i 財の売値を p_i，仕入値を c_i，売れ残った分の価格を s_i，品切れに対するペナルティ価格を v_i とする。$0 < p_i$，$0 < c_i$，$0 \leq s_i$，$0 \leq v_i$ とする[1)]。財の数を n とする。

期間中の各財の需要量を x_i，期首の在庫量を a_i とする。これらの量は連続変数とする[2)]。x_i の確率分布は既知であるとし，それを $f_i(x_i)$，その累積確率を $F_i(x_i)$ とする[3)]。

資源制約が有効な場合は，当然ながら $s_i < c_i < p_i$ を仮定するが，後で示すように資源制約が有効な場合は $s_i \leq c_i < p_i$ と仮定して，$s_i = c_i$ を排除する必要はない。この等式は，売れ残っても財がその価値を減らさないこと，もしくは売れ残った分は仕入れた値段で仕入れ元に返却できることを意味する。これは従来の新聞売り子の問題の資源制約無しのモデルでは取り扱えなかった条件で，資源制約無しの場合，$s_i = c_i$ を仮定すると，最適解は理論的に無限大となる。この等式 $c_i = s_i$ を認めることは，新聞売り子の問題の伝統的な前提である，販売期間が終わるとその価値を減らす，を緩めるものであり，対象となる財を，販売期間が終わってもその価値を減らさない，一般的なものに拡張することになる。その意味で，資源制約有りのモデルは新聞売り子の問題に本質的な違いをもたらすことになる。その差異がなぜ生じるかは後出の（7a）で示される。

全体の資源量を B とし，第 i 財の1単位当たりに必要な資源量を資源利用係数と呼び β_i とする。資

源を在庫スペースとすれば，B はその総面積であり，β_i は財 1 単位当りに必要な在庫スペースになる。

個々の財に関する期待利潤を EP_i とすると，それは次で示される。

$$EP_i = -c_i a_i + \int_0^{a_i} (p_i x_i + s_i(a_i - x_i)) f_i(x_i) dx_i + \int_{a_i}^{\infty} (p_i a_i - v_i(x_i - a_i)) f_i(x_i) dx_i,\ \ i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

EP_i の合計が全体の期待利潤 EP であり，これを最大化するような在庫量 a_i を最適在庫量とする。EP は次の（2）で示され，資源制約式は（3）で示される。

$$\begin{aligned} EP &= \sum\nolimits_1^n EP_i \\ &= \sum\nolimits_1^n \{-c_i a_i + \int_0^{a_i} (p_i x_i + s_i(a_i - x_i)) f_i(x_i) dx_i + \int_{a_i}^{\infty} (p_i a_i - v_i(x_i - a_i)) f_i(x_i) dx_i\} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\sum\nolimits_1^n \beta_i a_i = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n \leq \mathrm{B}, \quad a_i \geq 0, \ \ i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

EP を $a_1,\cdots,a_n$ の関数として $EP = EP\ (a_1,\cdots,a_n)$ とし，ラグランジェ乗数を λ_B とするとラグランジェ関数 $L(a_1,\cdots,a_n,\lambda_B)$ は次で示される。

$$\begin{aligned} L(a_1, \cdots, a_n, \lambda_\mathrm{B}) &= EP(a_1, \cdots, a_n) + \lambda_\mathrm{B}(\mathrm{B} - \sum \beta_i a_i) \\ &= \sum EP_i + \lambda_\mathrm{B}(\mathrm{B} - \sum \beta_i a_i) \end{aligned} \tag{4}$$

１階の条件は次のようになる。

$$\partial L / \partial a_i = -c_i + s_i + (p_i - s_i + v_i) \int_{a_i}^{\infty} f_i(x_i) dx_i - \lambda_\mathrm{B} \beta_i \leq 0, a_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{5a}$$

$$(c_i - s_i - (p_i - s_i + v_i) \int_{a_i}^{\infty} f_i(x_i) dx_i + \lambda_\mathrm{B} \beta_i) a_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{5b}$$

$$\sum \beta_i a_i = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n \leq \mathrm{B}, \quad \lambda_\mathrm{B} \geq 0 \tag{6a}$$

$$(\mathrm{B} - \sum \beta_i a_i) \lambda_\mathrm{B} = 0 \tag{6b}$$

（5b）と（6b）は相補スラック条件である。つまり（5a）と（6a）において 2 つの狭義の不等式が共に成り立つことはない。（5a）は（7a），（5b）は（7b）に書き替えられる。（7a）の$1 - F_i(a_i)$ は a_i の上側累積確率であるが，売切れ率と言い換えることもできよう。ここで $e_i = (c_i - s_i + \lambda_B \beta_i)/(p_i - s_i + v_i)$ と定義する。ここでも $a_i > 0$ならば（7a）の最初の不等式は等式で成り立たなければいけない。

$$e_i = \frac{c_i - s_i + \lambda_B \beta_i}{p_i - s_i + v_i} \geq \int_{a_i}^{\infty} f_i(x_i) dx_i = 1 - F_i(a_i), a_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{7a}$$

$$\left(\frac{c_i - s_i + \lambda_B \beta_i}{p_i - s_i + v_i} - (1 - F_i(a_i)) \right) a_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{7b}$$

さて，先に述べた，資源制約が有効ならば，新聞売り子の問題が扱う財を，販売期間が終わってもその価値を減らさない，一般的なものに拡張できるというのは，（7a）の λ_B つまり資源のシャドー・プライスが正となることによって示される。その場合，$s_i = c_i$ だとしても，e_i が 0 とならず，解 a_i が ∞ とならないからである。

さらに次の式が成り立つ。

$$\partial^2 EP / \partial a_i^2 = -(p_i - s_i + v_i) f_i(a_i) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{8a}$$

$$\partial^2 EP / \partial a_i \partial a_j = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n\ ;\ i \neq j \tag{8b}$$

よって $\partial^2 EP/\partial a_i \partial a_j$ を i 行 j 列の要素とする行列 $[\partial^2 EP/\partial a_i \partial a_j]$ は半負値定符合となり，１階の条件を満たす解が最大値になるための２階の十分条件が満たされることになる。

$EP^*(B)$ を B に対して EP の最大値が対応する関数とすると，(9a)（9b）が成り立つ。(9a）は最大値に関する定理から得られる。(9b）の証明は付録において示す[4]。これらの式は後で解を計算するときに利用する。

$$dEP^*/d\mathrm{B} = \lambda_\mathrm{B} \geq 0 \tag{9a}$$

$$d^2EP^*/\partial\mathrm{B}^2 = d\lambda_\mathrm{B}/d\mathrm{B} \leq 0 \tag{9b}$$

Ⅲ　最適解を得る手順

(5a）（5b）（6a）（6b）を満たす $a_i (i = 1, ..., n)$ の最適解と λ_B を求めるアルゴリズムを示す。a_i のきざみ幅をより小さくすることで，いくらでも精確な解を得ることができるが，ここでは後で解の性質を見るために a_i を整数とする。その意味で，厳密にいえば解は近似的なものとなる。プログラミングによる解法のため（7a）と（7b）の解の条件式を次のように置き換える。

$$\begin{cases} 1 - F_i(a_i) \leq \dfrac{c_i - s_i + \lambda_B \beta_i}{p_i - s_i + v_i} \leq 1 - F_i(a_i - 1) \quad \text{for} \quad 0 < a_i, \quad i = 1 \ldots n & \text{(10a)} \\ 1 - F_i(0) \leq \dfrac{c_i - s_i + \lambda_B \beta_i}{p_i - s_i + v_i} \quad \text{for} \quad a_i = 0, \quad i = 1 \ldots n & \text{(10b)} \end{cases}$$

この（10a）（10b）と先の（6a）（6b）を満たす λ_B と a_i $(= a_i^*$ とおく）の値が解となる。(10a）が成り立つときは $0 < a_i^*$ で，(10b）が成り立つときは $a_i^* = 0$ となる[5]。

次の手順で解を得ることができる。まず $\lambda_B = 0$ から始めて，この λ_B の値に対して（10a）(10b）を満たす $0 \leq a_i (i = 1, ..., n)$ の値を求める。この a_i の値を（6a）に代入して，資源制約の不等式が成立すれば，$\lambda_B = 0$ とそのときの $a_i (i = 1, ..., n)$ が解となる。この不等式が成立しなければ，λ_B の値を $\Delta\lambda_B (> 0)$ だけ増加させ，同じことを繰り返す。これを（6a）の不等式が成立するまで続け，(6a）の不等式が成立したときの λ_B とその $a_i (i = 1, ..., n)$ を解とする[6]。

これらの手順を以下にまとめる。

〈解を導く手順Ｉ〉

① $\lambda_B = 0$ に対して（10a）または (10b）を満たす $a_i (i = 1, ..., n)$ を求める。

② ①で求めた $a_i (i = 1, ..., n)$ に対して（6a）の資源制約の不等式が成立すれば，⑥へ飛ぶ。

③ (6a）の不等式が成立しなければ，λ_B の値を $\Delta\lambda_B$ だけ増加する。

④ 増加した λ_B に対して，(10a）または（10b）を満たす $a_i (i = 1, ..., n)$ を求める。

⑤ $a_i (i = 1, ..., n)$ に対して（6a）の不等式が成立すれば⑥へ飛び，成立しなければ③に戻る。

⑥ このときの λ_B と $a_i (i = 1, ..., n)$ を解として，終了する。

②の段階で（6a）の資源制約の不等式が成立し $\lambda_B = 0$ が解となった場合は資源が十分に存在し，全ての財について最適な在庫量が資源制約を受けずに実現されることを意味する。これは資源制約が無効であるということである。他方③に進んだ場合は λ_B の値を増加させる。$1 - F_i(a_i)$ は a_i の減少関数であるから λ_B の値が大きくなるにつれて（10a）を満たす a_i の値は小さくなり，必要とされる資源量は

少なくなる。これは（9b）と符合する。

ただし実際のプログラムでは，λ_B を単純に $\Delta\lambda_B$ ずつ増加するのではなく，（6a）の不等式を満たした段階で，一つに手前の λ_B の値に戻り，λ_B のきざみ幅 $\Delta\lambda_B$ を小さく，例えば元の0.01倍して，同じことを続ける。本稿でも最初は $\Delta\lambda_B = 1$ として，その後 $\Delta\lambda_B = 0.01$ として計算している。こうすることによって，より精確な λ_B の値を効率よく見つけることができる[7)]。

（9a）にあるように，λ_B は dEP^*/dB に等しく B の限界的な増加一単位当りに対する期待利得の増加であり，資源 B のシャドー・プライスである。また（9b）から $d\lambda_B/dB \leq 0$である。これらのことから，資源の効率性に関する解釈と理解が可能となり，経営戦略に利用することができる。例えば，資源購入のための銀行からの融資は“λ_B ＝融資の利子率”を購入量の基準にすればよい。さらに，この λ_B の値を利用することによって，発注期間が異なる財のグループの間での資源配分が可能になる。これについては 5 で論じる。

Ⅳ　数値実験と解の性質

上のアルゴリズムを組み込んだプログラムによる最適在庫量の計算例を示し，その解の特徴と傾向を考察する。与えられるパラメータは表 1 にあるように，諸価格 p_i，c_i，s_i，v_i と資源係数 β_i と資源量 B である。次に需要の確率分布，つまり確率分布 f_i と累積確率 F_i をどのように設定するかが問題になる。先に示した解を導く手順は任意の確率分布に対して適用できるものであるが，以下では，数値実験の再現性のためポアソン分布を採用し，各財の需要の確率分布の期待値 $\lambda_i (i = 1, \ldots, n)$ を指定し，それに対応するポアソン分布を適用する。

１．最適在庫量と期待利潤とシャドー・プライス

表 1 では $n = 20$，$B = 600$として，p_i，c_i，s_i，v_i，β_i と λ_i の値を設定し，それに対して計算された各財の最適な在庫量 a_i^* と，それに対する上側累積確率 $1 - F_i(a_i^*)$，期待利潤 EP_i，全体の期待利潤 EP，資源のシャドー・プライス λ_B を示している。それに加えて，資源制約が無いときの最適在庫量 a_i^u とそれに対する品切れ率 $1 - F_i(a_i^u)$ を示している。B^u は資源制約が無効になる資源量の最小値である。$EP_i < 0$ の場合があるのは $v_i > 0$ のためである[8)]。

表 1 では，Code01から Code07までは $p_i = 500$ と固定し（Code の番号は i と同じく財の番号），また Code02から Code07は Code01と比べて価格・パラメータの一つだけを変えて，Code01の結果と比較し易くしている。

さて，Code02では $c_2 = 50$と仕入値が Code01の $c_1 = 300$ に較べて大きく減少しているが，最適在庫は Code01の $a_1^* = 15$から $a_2^* = 22$とそれほどの上昇を示していない。一方 Code03では $c_3 = 370$ と少し増加することによって $a_3^* = 0$と一挙に落ち込んでいる。Code04では $c_4 = 300$，$s_4 = 299$ とし，売れ残った財に対してほぼ仕入れ値と同じ価格で返却できるように設定したが，それでも $a_4^* = 18$とそれほど増加しない。実はここで $c_4 = s_4 = 300$ としても，結果は同じく $a_4^* = 18$である[9)]。このことは，資源制約が有効なときには，販売時期を過ぎると財はその価値を減らす，という新聞売り子の問題本来の前提条件が取り除かれることを示す例となっている。（7a）及び（10a）における $\lambda_B\beta_i$ の存在がこのような結果を生んでいる。Code05では $v_5 = 290$ と v_5の大幅な増加が a_5^* を増加させているが，$a_5^* = 19$とそれほどの増加をもたらしていない。Code06では $\beta_6 = 5$と Code01に比べて資源利用係数が 2 増加することで $a_6^* = 0$と一挙に落ち込んでいるが，Code07では $\beta_7 = 1$と Code01に比べて 2 減らしても $a_7^* = 18$とそれほど増加していない。

表１　資源制約下の新聞売り子の計算例　$n=20$　$B=600$　$EP=55657$　$\lambda_B=48.29$　$B_u=1774$

Code: i	p_i	c_i	s_i	v_i	β_i	λ_i	a_i^*	$1-F_i(a_i^*)$	EP_i	a_i^u	$1-F_i(a_i^u)$
01	500	300	30	10	3	20	15	0.843	2830	19	0.530
02	500	50	30	10	3	20	22	0.279	8490	28	0.034
03	500	370	30	10	3	20	0	1.000	−200	17	0.703
04	500	300	299	10	3	20	18	0.619	3385	32	0.005
05	500	300	30	290	3	20	19	0.530	2517	22	0.279
06	500	300	30	10	5	20	0	1.000	−200	19	0.530
07	500	300	30	10	1	20	18	0.619	3136	19	0.530
08	250	50	5	10	1	20	21	0.356	3614	24	0.157
09	150	15	10	5	9	22	0	1.000	−110	31	0.027
10	120	50	0	10	8	20	0	1.000	−200	21	0.356
11	250	60	15	5	2	18	17	0.531	2933	22	0.145
12	660	80	5	12	7	19	18	0.531	9586	24	0.107
13	160	70	10	5	4	22	0	1.000	−110	23	0.363
14	50	10	5	5	1	20	0	1.000	−100	26	0.078
15	340	125	10	12	5	22	0	1.000	−264	24	0.288
16	350	60	10	5	6	18	9	0.985	2561	22	0.145
17	160	60	10	15	4	19	0	1.000	−285	21	0.275
18	840	60	40	5	3	15	18	0.181	11223	23	0.019
19	120	15	10	5	2	10	6	0.870	597	16	0.027
20	700	200	10	4	4	15	14	0.534	6253	17	0.251
計									55657		

まとめれば，a_i^* は特に c_i，β_i の変化に対して，a_i^* が 0 へ減少する局面では敏感な反応を示し，逆に増加する局面では鈍い反応を示しているといえる。

また資源制約が有効になることによって，Code03などのように $a_i^*=0$となる財が全20の財の内８あるが，他方 a_i^* が a_i^u（資源制約が無いときの最適在庫量）から少ししか減らず，資源制約の影響をあまり受けていない財もある。これらの結果の違いは（7a）における $\lambda_B\beta_i$ の比重の違いからくるものといえる。なお表１の解 $a_i^*(i=1,\ldots,n)$ が利用する資源の全体量は実際には597であり，これは $B=600$に満たない。この差は，解が離散的な整数であることに起因するものである。

次では，各価格・パラメータの影響を詳細に見るため，それらの値を少しずつ変化させていって，a_i^* の変化を見る。

２．各価格とパラメータの変化の影響

他の価格・パラメータを固定し，ある特定の価格またはパラメータのみが変化したときの最適解 a_i^* の動きを見る。まず仕入れ費用 c_i が変化したときの a_i^* の変化を見る。表２はその計算例であり，表１において，財の数，他の価格・パラメータの値を全てそのままに固定して，Code01の c_1の値のみを $480\le c_1\le 0$ の範囲で20ずつ変化させて $a_i^*(i=1,\ldots,n)$ を計算し，そのうち a_1 のみを示した。p_1，s_1，v_1，β_1 についてもそれぞれの範囲ときざみ幅で同様の計算をした。

表 2　価格等の変化に伴う a_1^* の変化（当該価格・パラメータ以外は表1と全て同じ値）

	c_1	a_1^*	p_1	a_1^*	s_1	a_1^*	v_1	a_1^*	β_1	a_1^*
1	480	0	350	0	0	15	0	15	12.0	0
2	460	0	400	0	15	15	30	16	11.5	0
3	440	0	450	13	30	15	60	16	11.0	0
4	420	0	500	15	45	15	90	17	10.5	0
5	400	0	550	16	60	15	120	17	10.0	0
6	380	0	600	17	75	15	150	18	9.5	0
7	360	11	650	18	90	15	180	18	9.0	0
8	340	13	700	19	105	16	210	19	8.5	0
9	320	14	750	19	120	16	240	19	8.0	0
10	300	15	800	19	135	16	270	19	7.5	0
11	280	16	850	20	150	16	300	19	7.0	0
12	260	16	900	20	165	16	330	20	6.5	0
13	240	17	950	20	180	16	360	20	6.0	0
14	220	18	1000	21	195	16	390	20	5.5	0
15	200	18	1050	21	210	16	420	20	5.0	0
16	180	19	1100	21	225	17	450	20	4.5	0
17	160	19	1150	21	240	17	480	21	4.0	12
18	140	19	1200	22	255	17	510	21	3.5	14
19	120	20	1250	22	270	17	540	21	3.0	15
20	100	20	1300	22	285	17	570	21	2.5	16
21	80	21	1350	22	300	18	600	21	2.0	17
22	60	21	1400	22	315	18	630	21	1.5	17
23	40	22	1450	22	330	18	660	21	1.0	18
24	20	22	1500	22	345	19	690	21	0.5	19
25	0	23	1550	23	360	19	720	22	0.0	19

当然ながら，c_1が増加するにつれて a_1^* は減少するが，注目すべき点は a_1^* の値が $c_1 = 380$ の時点から一挙に落ち込み 0 に達することである（これを急落現象と呼ぶ）。この急落現象のため，解は，もしそれを整数とすると， 0 の近辺には存在しにくくなる。では，この急落現象がなぜ生じるのか。その理由は（7a）の式の構造によって説明される。

$0 < a_i$ のとき，（7a）の最初の不等式は等式で成り立つ。その等式関係 $e_i = 1 - F_i(a_i)$ を図にしたのが図 1 である。ここでは $F_i(a_i)$ を $\lambda_i = 20$ のポアソン分布の累積確率とした。図 1 にあるように，e_i が 1 に近づくとき a_i は急速に 0 に落ち込む。これが急落現象を説明している。もし資源制約が無効ならば，$\lambda_B\beta_i$ の項がないため，（7a）において e_i が 1 に近づくのは c_i がかなり $p_i + v_i$ に近づいたときである。$v_i = 0$としても，この現象が生じるには p_i がかなり c_i に近づかなければならず，そのときの p_i と c_i の接近の度合いは現実の市場ではほとんど見られない程度といってよい。さらにもし $0 < v_i$ ならば，たとえ $c_i = p_i$ となっても，$e_i < 1$ のままであり，現実にはこの急落現象はまず現われないことになる。他方もし資源制約が有効ならば，$\lambda_B\beta_i$ の項が存在するため，c_i が p_i に比較して小さい値をとっても e_i は 1 に近づき，急落現象が生じ得る。なお $\lambda_B\beta_i$ の値が小さいと生じにくい。この急落現象は表 2 において p_1，β_1についても同様に現われているが（p_1は小さくなるとき，β_1は大きくなるとき），s_1，v_1については現れていない。

図 1 の逆 S の字型の形状はポアソン分布に限らず，正規分布に代表されるような両側に裾野を持つ一般的な形状の確率分布において現われる。なお一様分布はその累積分布が線形であり現われない。

次に c_i にしぼって，その変化に対する a_i の変化をより詳細にグラフで見てみる。図 2 は表 1 において財の数，他の価格・パラメータの値を全て同じにし，c_1 のみを35から530まで 5 ずつ変化させて，資

図１　$e_i = 1 - F_i(a_i)$ のグラフ　平均 $\lambda_i = 20$ のポアソン分布

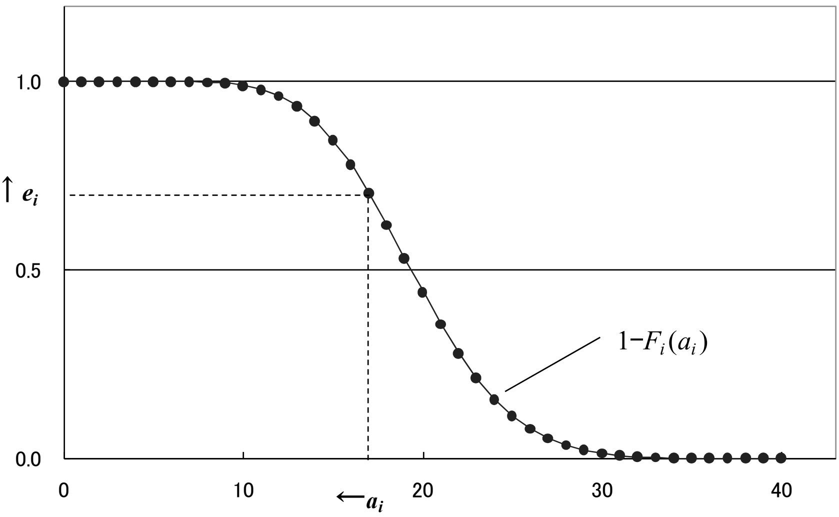
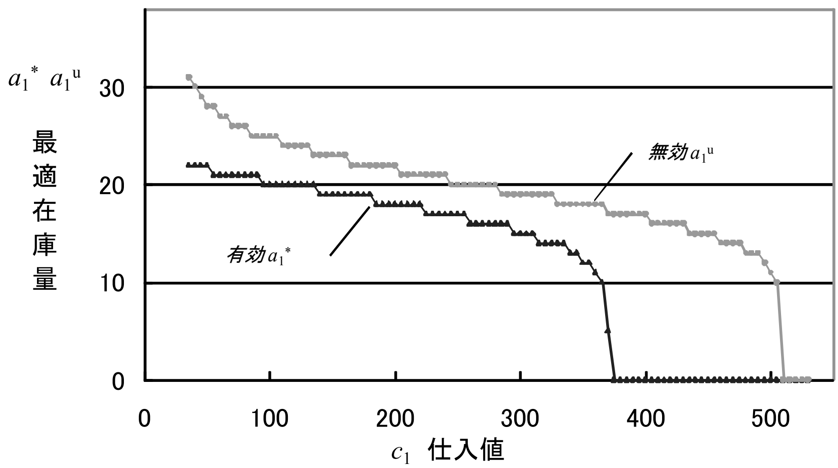


図２　資源制約有効と無効の最適在庫量 a_1^*　a_1^u（表1で c_1 のみ変化）



源制約が有効なときと無効なときの最適在庫量 a_1^* と a_1^u を示した。資源制約が有効なときには $c_1 = 365$ の辺りで急落現象が起き始めている。しかし無効なときには c_1 が500にかなり接近してから急落現象が起きている。$p_1 = 500$ であるから，現実には c_1 がここまで p_1に接近する状況は考えにくい。今ペナルティ価格は $v_1 = 10$ と小さいが，v_1 が大きくなると急落現象はより生じにくくなる。つまり資源制約が無効なときには急落現象は非常に観測されにくいということである。

上の議論では，λ_B の変化を考慮しなかったが，次にそれを考慮しつつ，c_i の変化に伴う a_i の変化を計算してみる。資源制約は有効とする。$0 < a_i$ であり，よって（7a）の最初の不等式は等式で成り立っているものとする。（7a）を c_i で微分して（11）を得る。

$$-\partial e_i/\partial c_i - \beta_i/(p_i - s_i + v_i)d\lambda_B/dc_i = f_i(a_i)da_i/dc_i \tag{11}$$

ここで（7a）から $\partial e_i/\partial c_i = 1/(p_i - s_i + v_i) > 0$ であり，（12）に示すように $d\lambda_B/dc_i < 0$である。（12）において k は i のうち $0 < a_i$ が成り立つ，つまり在庫量が正である財のみを選んだ添え字番号である。ただし全ての k に対して $f_k(a_k) > 0$ であることが（12）の等式が成り立つための十分条件となる[10)]。

$$d\lambda_B/dc_i = -\frac{\beta_i/(p_i - s_i + v_i)f_i(a_i)}{\sum_k \beta_k^2/(p_k - s_k + v_k)f_k(a_k)} < 0 \tag{12}$$

したがって（11）の左辺の第 2 項は正となって，c_i の変化に伴う λ_B の動きは $da_i/dc_i < 0$ の動きを打ち消すように働き，急落効果は弱まることになる。しかし $\partial e_i/\partial c_i = 1/(p_i - s_i + v_i)$ と（12）を（11）に代入すると次が成り立ち，依然 $da_i/dc_i < 0$ が成立することが分かる[11)]。

$$da_i/dc_i = -\left(1 - \frac{\beta_i^2/(p_i - s_i + v_i)f_i(a_i)}{\sum_k \beta_k^2/(p_k - s_k + v_k)f_k(a_k)}\right)\Bigg/(p_i - s_i + v_i)f_i(a_i) < 0 \tag{13}$$

よって λ_B は急落効果を打ち消すように動くが，これまでの数値による計算例が示すとおり，その影響は相対的に小さく急落効果は維持されることになる。（13）から分かるように，在庫量が正である財の数が多いほど（13）の分子は -1に近い値を取る傾向があり，その場合 λ_B の動きが $da_i/dc_i < 0$ の動きを打ち消す効果は弱まり，（13）は資源制約が無いときの $da_i/dc_i = -1/f_i(a_i)(p_i - s_i + v_i)$ に近い値をとることが分かる。その意味で在庫量が正である財の数が多いほど急落効果は大きくなる傾向があるといえる。他の価格・パラメータについても同様な議論ができるわけだが，ここでは行わない。

逆に表 2 において，c_i の値が減少し続け 0 となっても a_i^* の増加の伸びは緩い（これを緩昇現象と呼ぶ）。これは（7a）において $\lambda_B\beta_i$ の存在が e_i を 0 に近づけさせないためだといえる。この緩昇現象は表 2 において p_i の増加などについても見られる。これも急落現象と同様，（7a）の数式の構造と図 1 から説明でき，$e_i = 0.5$ 付近の e_i から見た $1 - F_i(a_i)$ の緩い傾きに対応していることになる[12)]。急落現象は B の減少に伴って λ_B が増加するときにも生じる。次ではその分析を行う。

3．資源量の変化

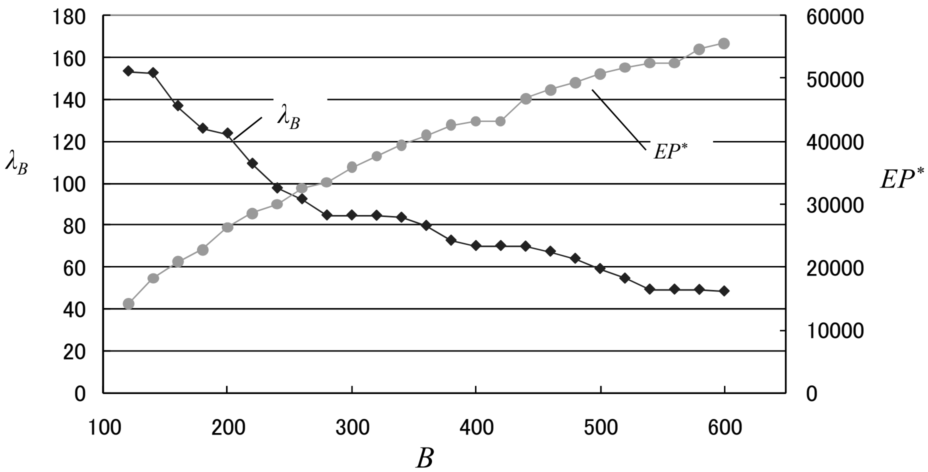
表 3 は，価格・パラメータの値を表 1 と同じにして，B の値を変化させたときの EP^*，λ_B，a_i^* の動きを示したものである。ただし $B = 600$ の時点ですでに $a_i^* = 0$ である財は除いている。B が減少するにつれて EP^* は減少し，λ_B は増加している。c_i の場合と同様 B が減少するにつれて，a_i^* はそれまでゆるやかに減少していたのが，途中で急落して 0 になる現象が見られる。これは（7a）における $\lambda_B\beta_i$ の上昇によるものである。a_i^* が急落し始めるタイミングは一様でなく，各財で異なる。急落現象がはじまると a_i^* が一気に 0 となるので，資源の減少にともなって財の数は絞り込まれていくことになる。

図 3 では，表 3 から B の変化に対する EP^* と λ_B の動きを抜き出している。（9b）にあるように $d\lambda_B/dB < 0$となっているが，この性質を利用して，次では発注期間の異なる 2 つの財のグループ間での最適資源配分を考える。

表 3　B の変化に対する EP^*　λ_B　a_i^* の動き（表 1 を元に計算；$B=600$ のときに $a_i^*=0$ の財は除く）

B	λ_B	EP^*	各財の最適在庫 a_i^*													$0<a_i^*$ の財の数
			$i=$	1	2	4	5	7	8	11	12	16	18	19	20	
600	48.29	55657		15	22	18	19	18	21	17	18	9	18	6	14	12
580	49.01	54731		15	22	18	19	18	21	17	17	7	18	6	14	12
560	49.17	52519		15	22	17	19	18	21	17	17	0	18	6	14	11
540	49.17	52519		15	22	17	19	18	21	17	17	0	18	6	14	11
520	54.41	51786		14	21	17	19	18	21	16	17	0	18	3	14	11
500	59.00	50718		14	21	15	19	18	21	16	16	0	18	0	14	10
480	63.88	49409		12	20	14	19	18	21	15	16	0	17	0	13	10
460	67.26	48163		11	20	12	18	18	21	15	15	0	17	0	13	10
440	69.67	46784		8	20	9	18	17	20	15	15	0	17	0	13	10
420	70.00	43215		0	20	0	18	17	20	15	15	0	17	0	13	8
400	70.00	43215		0	20	0	18	17	20	15	15	0	17	0	13	8
380	72.54	42578		0	20	0	18	17	20	14	14	0	17	0	13	8
360	79.57	40948		0	19	0	18	17	20	14	12	0	17	0	12	8
340	83.47	39388		0	19	0	18	17	20	13	10	0	16	0	12	8
320	84.43	37621		0	19	0	18	17	20	13	7	0	16	0	12	8
300	84.57	35846		0	19	0	18	17	20	13	4	0	16	0	12	8
280	84.58	33478		0	19	0	18	17	20	13	0	0	16	0	12	7
260	92.31	32492		0	18	0	17	17	19	11	0	0	16	0	12	7
240	97.50	29985		0	18	0	17	17	19	0	0	0	16	0	11	6
220	109.23	28492		0	17	0	16	16	19	0	0	0	15	0	10	6
200	123.69	26229		0	16	0	15	16	18	0	0	0	15	0	7	6
180	126.00	22709		0	16	0	15	16	18	0	0	0	15	0	0	5
160	136.77	20825		0	14	0	14	15	17	0	0	0	14	0	0	5
140	152.54	18154		0	9	0	13	15	17	0	0	0	14	0	0	5
120	153.34	14015		0	0	0	13	15	17	0	0	0	14	0	0	4

図 3　B 資源量と EP^*　λ_B との関係（表 3 より作成）



Ｖ　発注期間の異なる 2 つの財のグループ間での資源配分

発注期間の異なる 2 つの財のグループを M_1と M_2とする。この M_1と M_2に資源を配分して，期待利潤を最大化する問題を考える。この発注期間は上で論じてきた販売期間に等しいものとする。M_1と M_2にはそれぞれ n_1と n_2の数の財が含まれるているものとする。今資源を在庫スペースと考え，その面積全体を B とし，それを M_1 と M_2 に振り分ける面積を B_1 と B_2 とする。資源制約は有効であるとする。また発注期間をそれぞれ T_1 と T_2 とする。T_1 と T_2 は等しいとは限らない。B_1 と B_2 が T_1 と T_2 の期間においてもたらす期待利潤を EP^{M1}と EP^{M2}おく。$T_1 \times T_2$期間における 2 つの財のグループの期待利潤の和を最大化することを考える。これは単位期間当たりの期待利潤の和を最大化することにもなる。

$T_1 \times T_2$ 期間における 2 つのグループの期待利潤の和は $T_2 \times EP^{\mathrm{M1}} + T_1 \times EP^{\mathrm{M2}}$ となる。これを $B_1 + B_2 \leq B$ の制約下で最大化する問題を考える。λ_{B1} と λ_{B2} を B_1 と B_2 がそれぞれの発注期間においてもたらす限界期待利潤つまりシャドー・プライスとする。λ_{B1} と B_1，λ_{B2} と B_2 の関係は，上で論じてきた λ_B と B の関係と同じである。$T_2 \times EP^{\mathrm{M1}} + T_1 \times EP^{\mathrm{M2}}$ を B_1で微分して 0 とおくと，$T_2 \times \lambda_{B1} - T_1 \times \lambda_{B2} = 0$となる。これが最適条件となるが，それを変形して（14）が得られる。今 $d\lambda_{Bi}/dB_i \leq 0$ $(i = 1,2)$ が成立するので 2 階の十分条件が満たされる[13)]。

$$\lambda_{B_1}/T_1 = \lambda_{B_2}/T_2 \tag{14}$$

〈解を導く手順Ｉ〉によって任意の B_i に対して λ_{Bi} が決定されるが，各グループでのその変数関係を（15）のように関数として書き表す。これらの関数は各グループに属する財の諸価格，パラメータ，確率分布などに依存して決まる。

$$\lambda_{Bi} = \lambda_{Bi}(B_i), \quad i = 1, 2 \tag{15}$$

次に（14）を満たす B_1 と B_2 の値を求める手順を示す。$\Delta B_1(>0)$ は B_1 の増加分である。

〈解を導く手順Ⅱ〉

① $\lambda_{B1}/T_1 > \lambda_{B2}/T_2$ が成立する十分小さな値を B_1 に初期値として代入する。
② $B_2 = B - B_1$ として，$\lambda_{B1}(B_1)$ と $\lambda_{B2}(B_2)$ を〈解を導く手順Ｉ〉より導く。
③ $\lambda_{B1}/T_1 \leq \lambda_{B2}/T_2$ ならば④に行き，それ以外の場合は $B_1 = B_1 + \Delta B_1$ として②に戻る。
④ このとき得られた B_1 と B_2 と，それらに対して〈解を導く手順Ｉ〉より得られる各グループの a_i を解として，終了する。

手順には記述していないが，〈解を導く手順Ｉ〉と同様，③の不等式を満たした段階で一つに手前の B_1の値に戻り，ΔB_1を小さくして同じことを続けることで，より精確な解の値を効率よく見つけることができる。ここでは最終的に $\Delta B_1 = 1$ として計算している。

上の④では各グループに属する各財の最適在庫量も決定されるが，その計算例を表 4 で示す。表 4 では $B = 1200$，$n_1 = 20$，$n_2 = 16$，$T_1 = 3$，$T_2 = 5$として，表 1 と同じように各価格とパラメータの値を設定し，それらに対して a_i^* を計算し，また $\lambda_{B1}/T_1 = 7.370$，$B_1 = 838$，$\lambda_{B2}/T_2 = 7.374$，$B_2 = 362$ の結果を得ている。このときの M_1と M_2の期待利潤はそれぞれの $EP^{\mathrm{M1}} = 62106$，$EP^{\mathrm{M2}} = 22863$である[14)]。よって期待利潤の合計は84969となる。

表４　2つの発注期間の異なる財のグループ間での最適資源配分と在庫量

$B = 1200$　$n_1 = 20$　$T_1 = 3$　$n_2 = 16$　$T_2 = 5$　$\lambda_{B1}/T_1 = 7.370$　$B_1 = 838$　$\lambda_{B2}/T_2 = 7.374$　$B_2 = 362$

Code: i	p_i	c_i	s_i	v_i	β_i	λ_i	a_i^*	$1-F_i(a_i^*)$	EP_i	Code: i	p_i	c_i	s_i	v_i	β_i	λ_i	a_i^*	$1-F_i(a_i^*)$	EP_i
01	450	100	10	5	1	20	23	0.213	6418	01	300	285	10	4	5	15	0	1.000	-60
02	120	50	0	5	5	15	0	1.000	-75	02	300	285	10	4	5	20	0	1.000	-80
03	250	100	15	5	3	18	16	0.625	2188	03	300	285	10	4	5	15	0	1.000	-60
04	660	100	5	5	4	20	23	0.213	10453	04	560	200	5	4	4	22	21	0.528	6778
05	160	70	10	5	5	10	0	1.000	-50	05	160	60	10	5	5	10	0	1.000	-50
06	50	10	10	5	4	15	0	1.000	-75	06	80	10	10	5	4	12	0	1.000	-60
07	340	110	10	1	5	12	11	0.538	2228	07	340	110	5	5	7	10	0	1.000	-50
08	320	30	10	5	8	12	11	0.538	2898	08	320	30	10	5	8	18	5	1.000	1385
09	160	60	10	5	9	10	0	1.000	-50	09	260	60	10	5	9	6	0	0.998	-30
10	840	240	50	5	2	10	12	0.208	5198	10	440	240	50	5	2	10	8	0.667	1408
11	120	20	10	5	1	12	14	0.228	1108	11	120	20	10	5	1	12	13	0.318	1081
12	700	150	10	4	7	9	9	0.413	4127	12	700	150	10	4	7	12	11	0.538	5414
13	340	120	10	1	7	10	7	0.780	1458	13	340	120	10	1	7	10	0	1.000	-10
14	320	30	10	5	8	18	16	0.625	4365	14	420	30	10	5	8	15	12	0.732	4482
15	160	60	10	5	9	10	0	1.000	-50	15	260	60	10	5	9	16	0	1.000	-80
16	840	240	50	5	4	20	22	0.279	10841	16	600	240	50	5	4	10	9	0.542	2795
17	120	30	10	5	1	8	9	0.283	618										
18	700	150	10	4	7	12	12	0.424	5648										
19	120	20	10	5	1	8	10	0.184	731										
20	700	150	10	4	7	9	9	0.413	4127										
計									62106	計									22863

Ⅳ　おわりに

本稿で示したモデルと手法は，資源制約下で，売値，仕入値などの諸価格，資源への負担，需要の確率分布を勘案しつつ，理論的に期待利潤の最大化を図るものであるが，そこで得られた結論は，通常の裾野があるよう確率分布の下では，需要の期待値がある程度大きいとき，資源量が小さくなるにしたがって，最適在庫量の０への“急落現象”が生じ，扱うべき財の数がしぼられていくというもので，上で述べたように ABC 分析との類似性が見られる。しかし，その精確な比較は行っていない。本稿で議論した期待利潤最大化を図る新聞売り子の問題と ABC 分析の間で，在庫量の決定基準とそれがもたらす結果にどのような違いがあるか，詳細な分析が興味深い問題として残る。ABC 分析の理論的根拠，もしくは逆に ABC 分析の問題点が指摘できるかもしれない。

また資源制約が有効な場合には，新聞売り子問題が扱える財が，従来の販売期間を過ぎると価値が下がる財から，そうとは限らない一般的な財に拡張されることを示したが，この点も重要である。

最後に発注期間が異なる２つの財のグループがある場合の最適在庫の手順とその計算例を示したが，グループが３つ以上の場合も本稿の手順を改良することで可能になるといえよう。

付　録

A.　$d^2EP^*/\partial B^2 = d\lambda_B/dB \leq 0$（9b）　の証明

（9b）は〈解を導く手順Ｉ〉での考察からも分かることだが，ここで厳密に証明しておく。ただし $a_1, \ldots, a_n$，λ_B が B に対して連続であると仮定する。

（6a）において，まず資源制約が無効であるとすると，（3）の $\sum \beta_i a_i - B < 0$ が成立し，$a_1, \ldots, a_n$，λ_B の連続性より B の微小な変化に対してもこの不等式が維持されて $\lambda_B = 0$ が維持される。

よって $d\lambda_B \,/\, dB = 0$ である。

次に資源制約が有効であるとする。(5a) の $\partial L/\partial a_i < 0$が成り立つ i については $a_i = 0$ であり，上と同じ連続性より B の微小な変化に対して $\partial L/\partial a_i < 0$ が維持されて $a_i = 0$ が維持され，よって $da_i = 0$ である。したがって以下では $\partial L/\partial a_i = 0$ が成り立つ財（つまり $0 < a_i$）についてのみ，その財の数を $m(\leq n)$ とし，その財の番号を $i_1, \ldots, i_m$ として考察する。よって（5a）と（6a）では等式が成り立ち，それを全微分すると次が成り立つ。

$$-(p_k - s_k + v_k) f_k(a_k) da_k = \beta_k d\lambda_{\mathrm{B}}, \quad k = i_1, \ldots, i_m \tag{A1}$$

$$dB = \beta_{i1} da_{i1} + \cdots + \beta_{im} da_{im} = (\beta_{i1}, \cdots, \beta_{im})'(da_{i1}, \cdots, da_{im}) \tag{A2}$$

ここで全ての k に対して $0 < f_k(a_k)$ が成り立つ場合は，以下がいえる。（A1）を行列表記すると（A3）になる。（A3）の $[\partial^2 EP/\partial a_k \partial a_j](k, j = i_1, \ldots, i_m)$ の要素は（8a）（8b）で添え字の i を k に置き換えたものである。

$$[\partial^2 EP/\partial a_k \partial a_j](da_{i1}, \cdots, da_{im})' = (\beta_{i1}, \cdots, \beta_{im})' d\lambda_{\mathrm{B}} \tag{A3}$$

$[\partial^2 EP/\partial a_k \partial a_j]$は負値定符合となり正則である。（A3）から得られる$(da_{i1}, \cdots, da_{im})$を（A2）に代入する。また$[\partial^2 EP/\partial a_k \partial a_j]^{-1}$は対角行列でその k 行 k 列の要素は$-1/(p_k - s_k + v_k) f_k(a_k)$である。したがって次が成り立つ。

$$\begin{aligned} d\lambda_B/dB &= \frac{1}{(\beta_{i1}, \cdots, \beta_{im})'[\partial^2 EP/\partial a_k \partial a_j]^{-1}(\beta_{i1}, \cdots, \beta_{im})} < 0 \\ &= \frac{-1}{\sum_k \beta_k^2/(p_k - s_k + v_k) f_k(a_k)} < 0 \end{aligned} \tag{A4}$$

他方，ある k に対して $f_k(a_k) = 0$ が成り立つ場合は（A1）から，$0 = \beta_k d\lambda_B$ となり，$d\lambda_B/dB = 0$ となる。

よって（9a）と最初の結果から $d^2 EP^*/\partial B^2 = d\lambda_B/dB \leq 0$ が証明された。上の議論から分かるように，資源制約が無効な場合は $d\lambda_B/dB = 0$ であり，資源制約が有効な場合は $d\lambda_B/dB \leq 0$ であるが，全ての k に対して $0 < f_k(a_k)$ が成り立つことが十分条件として与えられたときには，$d\lambda_B/dB < 0$ である。

B. （12）の証明

ここでは，全ての k に対して $0 < f_k(a_k)$ が成り立つことを仮定する。資源制約は有効であるとする。$a_k > 0$ である c_k を外生変数として，（5a）と（6a）を全微分すると次が成り立つ。

$$-(p_k - s_k + v_k) f_k(a_k) da_k = \beta_k d\lambda_{\mathrm{B}} + dc_k, \quad k = i_1, \ldots, i_m \tag{B1}$$

$$0 = dB = \beta_{i1} da_{i1} + \cdots + \beta_{im} da_{im} = (\beta_{i1}, \cdots, \beta_{im})'(da_{i1}, \cdots, da_{im}) \tag{B2}$$

（B1）を行列表記すると（B3）になる。

$$[\partial^2 EP/\partial a_k \partial a_j](da_{i1}, \cdots, da_{im})' = (\beta_{i1}, \cdots, \beta_{im})' d\lambda_B + (dc_{i1}, \cdots, dc_{im})' \tag{B3}$$

（B3）から得られる$(da_{i1}, \cdots, da_{im})$を（B2）に代入して次の（B4）つまり（12）が成り立つ。ここで全ての k に対して$0 < f_k(a_k)$ が成り立つので，$[\partial^2 EP/\partial a_k \partial a_j]$は負値定符合となり正則である。(B4) では k のある値を i としてそれ以外の k については $dc_k = 0$としている。

$$d\lambda_{\mathrm{B}}/dc_i = \frac{\beta_i/(p_i-s_i+v_i)f_i(a_i)}{(\beta_{i1},\cdots,\beta_{im})[\partial^2 EP/\partial a_k \partial a_j]^{-1}(\beta_{i1},\cdots,\beta_{im})'} < 0$$
$$= -\frac{\beta_i/(p_i-s_i+v_i)f_i(a_i)}{\sum_k \beta_k^2/(p_k-s_k+v_k)f_k(a_k)} < 0 \qquad \text{(B4)}$$

以上

注

1）s_i，v_i については，売れ残った分を処分するのに費用が発生する場合には $s_i < 0$，品切れが価格の上昇を招き，逆に売り手にとって有利に働くような場合には $v_i < 0$ の可能性もある。それらの場合も極端な値をとらない限り，本稿の枠組みで同じように扱うことができる。ただし議論が煩雑になるのでこれらのケースについては扱わない。

2）ただし後で実際にプログラムによって問題を解くときには，近似的に整数，離散的な量として計算する。

3）ただし後出の（12）（13）を求めるときは，分母が０とならなように $0 < f_i(x_i)$ を仮定する。ただ（12）（13）は本稿の結論を得るための補助的なものであり，本稿の主要な結論に本質的な影響を与えるものではない。

4）（9a）については例えば神谷和也・浦井憲（1996）の定理 7.5.3（p305）を参照。（9b）に関しては，付録で示したように，資源制約が無効な場合は $d\lambda_B/dB = 0$，資源制約が有効な場合は $d\lambda_B/dB \leq 0$ であるが，全ての k に対して$0 < f_k(x_k)$ が十分条件として与えられたときには，$d\lambda_B/dB < 0$ である。

5）（10a）（10b）は資源制約が無くかつ離散的な場合の解の条件「$1-F_i(a_i) \leq (c_i-s_i)/(p_i-s_i+v_i) \leq 1-F_i(a_i-1)$ ならば解は a_i」の援用でもある。これについては宮川（1979）の p51を参照。また理論上（10a）（10b）において等式が成立すると，２つの連続する整数 a_i と a_i+1が（10a）（10b）を同時に満たすことになる。この場合は小さい方の a_i を解とする。なお（10a）（10b）の $F_i(a_i)$ は離散的な分布で a_i の値を含む累積確率である。

6）Erlebacher（2000）などにおいてこれと同様の手順が示されている。（10a）（10b）を用いるところが本稿の一つの試みである。なお a_i の値が連続的に変化しないので，たとえ $\lambda_B > 0$であっても，プログラムの計算上（6a）の資源制約の等式が厳密に成り立つとは限らない。

7）ただし煩雑になるので〈解を導く手順 I 〉にはこの処理を記述しない。

8）本稿での計算は全て Excel VBA を用いて単精度で行った。表１の計算結果を得るのに要した時間は一定ではない。10回計算して得た平均値は0.0352秒である。また財の数を十分多くするために，表１の財の諸価格とパラメータの数値をそのまま９回コピーして表１に追加し，$n = 200$，$B = 6000$としても計算した。このときの計算時間の平均値（10回）は0.3148秒である。十分実用的な計算時間だといえる。本稿での計算で用いたパソコンのスペックは CPU:Intel（R）Core（TM） 2 Duo 3.00 GHz，メモリ：4.00GB，OS:Windows Vista Business 32bit である。

9）しかし $c_i = s_i$ とすると，資源制約が無い場合の最適在庫が $a_i^u \to \infty$となるので，表１ではそれを避けた。

10）ここでの論考と（12）の証明については付録を見よ。

11）もし在庫量が正となる財が１つだけになれば，k は i だけとなって，（13）の分子が０となり，（13）は $da_i/dc_i < 0$ ではなく $da_i/dc_i \leq 0$ となるが，ここではこの特殊な場合を除いている。

12）図１の形状から急落減少が $e_i = 0$ の近くでも生じ得ることが分かる。

13）さらに全ての i に対して$0 < f_i(x_i)$ が十分条件として与えられると，$d\lambda_{Bi}/dB_i < 0$ $(i = 1,2)$ が成立するので，（14）を満たす B_1と B_2 は一意的に決まる。注の４）と付録を参照。

14）表４の計算結果を得るのに要した時間は一定ではなく，10回計算して得たその平均値は5.432秒である。今回は初期の B_1 の値を400として計算したが，初期の B_1の値をより解に近い値にすることによって計算時間は短縮される。計算を重ねることで，初期の B_1 の値をより解に近い値に設定することができるようになろう。同様のこ

とは本稿の他の計算においてもいえる。

参考文献

Abdel-Malek, L.L. and Montanari, R.（2005）, "On the multi-product newsboy problem with two constraints," *Computers & Operations Research*, 32, 2095-2116.

Abdel-Malek, L., Montanari, R. and Morales, L.C.（2004）, "Exact, approximate, and generic iterative models for the multi-product Newsboy problem with budget constraint," *International Journal of Production Economics*, 91, 189-98.

Chern, M., Lin, K. and Chen, C.（1991）, "A heuristic algorithm for the deterministic multi-product inventory system with capacity constraint," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 34, 1-12.

Choi, J., Cao, J.J., Romeijn, H.E., Geunes, J. and Bai, S.X.（2005）, "A stochastic multi-item inventory model with unequal replenishment intervals and limited warehouse capacity," *IIE Transactions*, 37, 1129-1141.

Erlebacher, S.J.（2000）, "Optimal and heuristic solutions for the multi-item Newsvendor problem with a single capacity constraint," *Production and Operations Management*, 9, 303-318.

Hadley, G. and Whitin, T. M.（1963）, *Analysis of Inventory Systems*（Englewood Cliffs, Prentice-Hall）.

Lau, H. and Lau, A.H.（1996）, "The newsstand problem: A capacitated multiple-product single-period inventory problem," *European Journal of Operational Research*, 94, 29-42.

神谷和也・浦井憲（1996）『経済学のための数学入門』東京大学出版会。

宮川公男（1979）『オペレーションズ・リサーチ』春秋社。

（2009年11月27日掲載決定）