

〔研究ノート〕

進化ゲームと社会制度に関するノート

前 野 富士生

Ⅰ はじめに

フォン・ノイマン&モルゲンシュテルン（1944）に始まるゲーム理論は合理的なプレイヤーを想定する。合理的なプレイヤーをノイマン的プレイヤーと呼ばば、ノイマン的プレイヤーは、相手がどんな戦略を取ってくるかを、先の先まで確実に予想して自分の利得を最大にするが、進化ゲームでのプレイヤー（スミスのプレイヤーと呼んでおく Maynard Smith 1973, 1983）は合理性を仮定しない。スミスのプレイヤーは生物学の分野の進化を扱っており、集団の中の固体がどのように生き残っていくか、すなわち自然や環境に適応していくものが、その子孫を残していく自然淘汰の状態をゲーム的に扱う。生物学でのスミスのプレイヤーは、遺伝的に組み込まれた行動様式によってプレイするのである。

ところで、ゲーム理論を現実の諸制度や慣習あるいは人間の行動に適用する場合は、ノイマン的プレイヤーのように完全合理的なプレイヤーとするのも現実味に乏しいし、スミスのプレイヤーのように遺伝的に組み込まれたプログラムによって、行動するのでもないとなると、限られた合理性、限定合理的に行動するプレイヤーが現実的であると考え¹⁾。そこで、進化ゲーム理論を限定合理的プレイヤーに適応して、人々の行動を検討する。

進化ゲームでは、一つの集団あるいは一つの社会を想定するので、プレイヤーは有限であることも、無限であることもありうる。その同じ集団ないし社会からランダムに選ばれたもの同士が会って、決められたゲームを繰り返しプレイするいわゆるゲーム理論の繰り返しゲームに似ているが、繰り返しゲームでは、プレイヤーは決まっており、それぞれ過去にどのようなプレイをしたかがわかり、それによってまた異なる行動もとるという、互いのプレイヤーは極めて合理的な行動をするが、進化ゲームでのプレイヤーはランダムに次々と選ばれたもの同士がプレイしていくのであるから、過去に自己のとった行動とは全く無関係となる²⁾。結果として与えられたゲームで、その集団（限られた意味で合理的に行動をとる人々の集団）のなかで、同じ行動をとる人の割合はどれくらいか、同じことであるが、別の行動をとるのはどのくらいか、それが増えるか減るかを社会制度（慣習）との関連で分析する。

以下では進化ゲームの定式化を簡単に示す

Ⅱ 進化ゲームの定式化³⁾

多くのメンバーからなる集団を考え、その集団の任意の二人のプレイヤーが会って、対称な相行列ゲーム（A, B）をプレイする。対称であるとはここでは、 $B = A'$ （ A' はAの転置を表す）。単純化のためにAは 2×2 行列とする。

$$\begin{aligned}
 &\text{戦略 } S = (s, 1-s) \quad Q = (q, 1-q) \\
 &\text{プレイヤー 1 の期待利得 } \Pi_1(S, Q) = SAQ' = u(s, q) \\
 &\text{プレイヤー 2 の期待利得 } \Pi_2(S, Q) = SA'Q' = h(s, q) \\
 &\text{対称であるから } u(s, q) = h(q, s) \quad (1)
 \end{aligned}$$

したがって、プレイヤー 1 の利得 $u(s, q)$ のみを考えればよい

ところで集団のほとんどのメンバーは $S = (s, 1-s)$ の戦略を用いており、このときわずかの逸脱組みあるいは突然変異体がそれぞれ別の戦略 G_1, G_2, \dots, G_k をもちいたとする。その初めの戦略をそれぞれ g_1, g_2, \dots, g_k とする。さらに離散的確率変数 X を定義し、プレイヤー 1 の相手を取る戦略 $X=s, g_1, \dots, g_k$ を表すので、次の性質を有する。

注) プレイヤー 1, プレイヤー 2 は同じ集団の異なるメンバーという意味で、便宜上ここでプレイヤー 1 としている。以下同様

$$P(X=s) = (1-\varepsilon), \quad P(X=g_j) = \varepsilon_j \quad j=1, 2, \dots, k$$

$$\sum_{j=1}^k \varepsilon_j = \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ は突然変異でごくわずかの割合})$$

プレイヤー 1 が S を用い、プレイヤー 2 が X を用いるとすると、プレイヤー 1 の期待利得または適応度は

$$R(s, X) = u(s, s)(1-\varepsilon) + \sum_{j=1}^k u(s, g_j)\varepsilon_j \quad (2)$$

同様に、プレイヤー 1 が g_h ($h=1, 2, \dots, k$) を用いたときのプレイヤー 1 の適応度は

$$R(g_h, X) = u(g_h, s)(1-\varepsilon) + \sum_{j=1}^k u(g_h, g_j)\varepsilon_j \quad (3)$$

注) 突然変異体 g_j ($j=1, 2, \dots, k$) が侵入した集団を $s(1-\varepsilon) + \sum_{j=1}^k g_j\varepsilon$ とすれば、この集団で (2) 式は s の適応度であり、(3) 式は突然変異体の一つ g_h の適応度である。

既存プレイヤーの戦略 s が突然変異体の戦略 g_h より望ましいためには

$$R(s, X) > R(g_h, X) \quad h=1, 2, \dots, k$$

より

$$(u(s, s) - u(g_h, s))(1-\varepsilon) + \sum_{j=1}^k [u(s, g_j) - u(g_h, g_j)]\varepsilon_j > 0 \quad (4)$$

(4) より s が侵入させない戦略、あるいは進化的安定戦略 ESS であるとは次の定義による。

戦略 S が戦略 G_1, G_2, \dots, G_k にたいして ESS であるとは次のときである。

$$(S \neq G_i \quad i=1, 2, \dots, k)$$

定義 1

- (a) $u(s, s) > u(g_h, s) \quad h=1, 2, \dots, k$
 (b) 任意の g_h にたいして $u(s, s) = u(g_h, s)$ であれば
 $u(s, g_j) > u(g_h, g_j) \quad j=1, 2, \dots, k$

突然変異体の戦略が $k=1$ のときは

$G = (g, 1-g) \quad 0 < g < 1$ であり S が ESS であるのは次の条件を満たすときである。

- (a) $u(s, s) > u(g, s) \quad \forall 0 < g < 1$
 (b) $u(s, s) = u(g, s)$
 $\Rightarrow u(s, g) > u(g, g) \quad \forall g \neq s$

進化的安定戦略はこのように定義されるが、これと同値の次の定義式を通常用いる⁴⁾

定義 2

$$u(s, \varepsilon g + (1-\varepsilon)s) > u(g, \varepsilon g + (1-\varepsilon)s) \quad (5)$$

($0 < \varepsilon < \varepsilon_g$; ε_g は突然変異体を阻止するバリアーの高さ)

(5) の左辺は $\varepsilon u(s, g) + (1-\varepsilon)u(s, s)$, 右辺は

$$\varepsilon u(g, g) + (1-\varepsilon)u(g, s) \quad ^5)$$

これより S が ESS であるとは

$$\varepsilon u(s, g) + (1-\varepsilon)u(s, s) > \varepsilon u(g, g) + (1-\varepsilon)u(g, s)$$

この条件は

$$\varepsilon[u(s, g) - u(g, g)] + (1-\varepsilon)[u(s, s) - u(g, s)] > 0 \quad (6)$$

(6) より定義 1 と定義 2 は同値であることがいえる⁶⁾。

Ⅲ 進化ゲームの動学化

はじめに、進化安定戦略の条件を定式化した。ところで、ゲームにおいて、各戦略の割合を戦略分布というが、戦略分布は学習や経験を通して変化し調整されていく。このように考えると集団ないし社会の人々の行動は、時間とともに適応度〔利得〕の大きさに従って変化するので、その戦略分布は動学的に表すことができる。そこで戦略の確率分布はどのように変化するかを次の微分方程式を用いて表す⁷⁾。

$$\frac{dp}{dt} = p[\gamma(N) - \bar{\gamma}] \quad (7)$$

P はプレイヤー 1 (その集団からの任意の個人) が戦略 N をプレイする確立であり、 $\gamma(N)$ は戦略 N をプレイすることによる期待適応度であり、 $\bar{\gamma}$ はその集団の平均適応度である。

(7) より戦略の期待適応度が集団の平均適応度より大きい場合は、プレイされている戦略の確立は増加し、逆の場合は減少する。

Ⅳ 進化ゲームの応用事例

これまでの定式化を踏まえて、これがどのように社会制度に適用されるかを、 2， 3 の事例を用いて試みる。

表 1 Ⅳ -a 囚人のジレンマゲーム

	C 協力	N 非協力
C 協力	4， 4	1， 6
N 非協力	6， 1	2， 2

現在では若者が都会に出て、田舎の多くは高齢者のみからなる限界集落になりつつある。したがって、都会で生活している人は、それぞれの田舎から出た人が多い。表 1 はその集団からランダムにマッチングして、故郷納税制度なり、募金を考え、田舎の活性化を思う人と、そうでない人の利得〔適応度〕をマトリックスにしたものである。協力同士は、自分たちの故郷だからというので 4， 協力と非協力では、非協力の人は、村の人口も減ってそのことは、無駄と考え 6， 協力は 1， というように仮説の利得を与えている。

協力の期待利得は $\gamma(C) = 4(1-p) + p = 4-3p$
非協力の期待利得は $\gamma(N) = 6(1-p) + 2p = 6-4p$ (ただし P は非協力の確立)

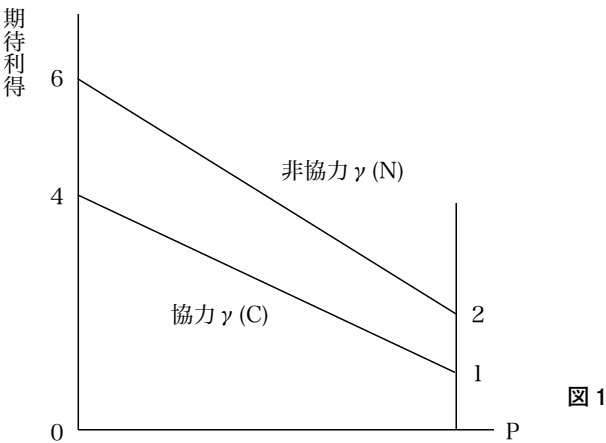


図 1 は田舎から都会に出た人々の集団に関する協力と非協力の戦略についてのそれぞれの期待利得をグラフに表したものである。囚人のジレンマゲームでは、非協力戦略が協力戦略を支配するから、ゲームが繰り返しプレイされるとき、グラフでは右方向すなわち非協力に収束する。非協力戦略 (N, N) は従って進化的に安定な戦略である。

つぎにそれぞれの戦略分布はどのように変化するか検討する。囚人のジレンマの平均の期待利得は

$$\begin{aligned}\bar{\gamma} &= p\gamma(N) + (1-p)\gamma(C) = p(-4p+6) + (1-p)(-3p+4) \\ &= -p^2-p+4\end{aligned}$$

(7) より

$$\frac{dp}{dt}=p(\gamma(N)-\tilde{\gamma})=p^3-3p^2+2p=p(p-2)(p-1)$$

$0 < p < 1$ では p は増加

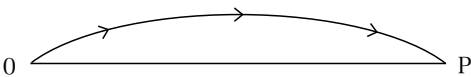


図 2

$p=0, 1$ は定常状態の均衡であり、均衡以外では戦略 N をプレイする確立は増加していき、戦略 C は減少する。このことは、全てのプレイヤーは時間にわたって、非協力戦略をプレイするという均衡に収束する。この均衡は進化的に安定な均衡戦略で、囚人のジレンマのナッシュ均衡である。

表 2 IV -b 男女の争いゲーム

革新 保守	C 子供手当	M 軍事費
	2, 5	0, 0
C 子供手当	2, 5	0, 0
M 軍事費	0, 0	5, 2

最近では少子高齢化社会と称して、社会全体で子供を育てるというので、予算をつけようという政党と、このような予算のつけ方はバラマキであり、国の安全保障が十分でないのでその方に重点を置くという政党が存在する。社会にも前者に近いグループと後者に賛同するグループが存在するものとし、前者のグループおよび政党を革新集団とし、後者のグループおよび政党を保守集団として、利得表にしたのが表 2 である。戦略が異なるときは、国でも、町の声でも意見が異なることより利得適応度はゼロとなるゲームである。

この 2 つの集団でランダム・マッチングにゲームが繰り返される場合を想定する。このように、集団間で相互に影響しあって、ゲームがある方向に収束していくことをゲームの共進化という。共進化に関して、保守集団での子供手当での確立を p 、軍事費の確立を $1-p$ とし、革新集団での子供手当での確立を q 、軍事費の確立を $1-q$ とする。以下では保守集団と革新集団の子供手当と軍事費についての進化的安定戦略、戦略分布の変化および共進化がどのようになるかを見る。保守集団の子供手当での期待利得 $\gamma(C)$ と軍事費 M の期待利得 $\gamma[M]$ および平均の利得 $\tilde{\gamma}$ は以式である。

$$\gamma(C)=2q$$

$$\gamma(M)=5-5q$$

$$\tilde{\gamma}=p\gamma(C)+(1-p)\gamma(M)=2pq+(1-p)(1-q)$$

これより保守集団の子供手当での動学過程は (7) 式より

$$\frac{dp}{dt}=p[2q-(2pq+5(1-p)(1-q))]=p(1-p)(7q-5) \tag{8}$$

同様に革新集団のそれは

$$\gamma(C)=5p$$

$$\gamma(M)=2-2p$$

$$\tilde{\gamma}=q\gamma(C)+(1-q)\gamma(M)=5pq+2(1-p)(1-q)$$

$$\frac{dq}{dt}=q[5p-(5pq+2(1-q)(1-p))]=q(1-q)(7p-2) \tag{9}$$

(8), (9) 式より

$$0 < q < \frac{5}{7}, \rightarrow \frac{dp}{dt} < 0 \qquad 0 < p < \frac{2}{7} \qquad \rightarrow \frac{dq}{dt} < 0$$

同様にして、 p と q の動きを調べると、4つのケースに分けられ、その最適反応を位相図にしたのが図3である。革新集団で子供手当の割合 q が、 $\frac{5}{7}$ 以上であるときは、保守集団の最適反応は子供手当の割合が増加する。逆に q が $\frac{5}{7}$ 以下のときは保守集団で子供手当の割合は減少する。保守集団で子供手当の割合が $\frac{2}{7}$ 以上のときは、革新集団の最適反応は子供手当の増加であり、 p が $\frac{2}{7}$ 以下のときは革新集団の子供手当の減少である。これより進化安定戦略 ESS はナッシュ均衡点 (C, C) と (M, M) であり、混合戦略のナッシュ均衡点 $(\frac{2}{7}, \frac{5}{7})$ 、 $(\frac{5}{7}, \frac{2}{7})$ は ESS ではない。

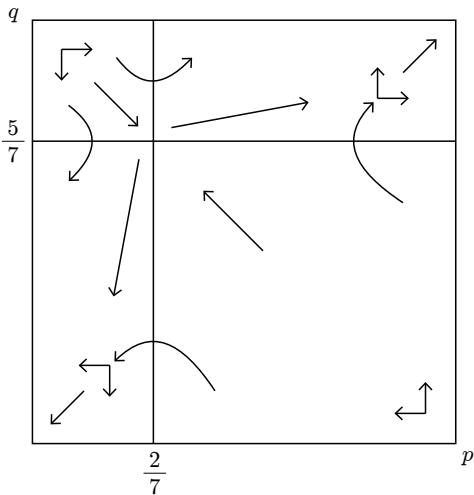


図3

表3 IV-c タカ・ハトゲーム

	H 自宅	F 施設
H 自宅	3, 3	2, 5
F 施設	5, 2	1, 1

以前は親の介護は自宅〔子供〕で世話をしていたが、介護疲れという問題もあり、地域での介護施設も整備、充実されてきた。ゲームは単純に親の介護を自宅で見るか、医療施設にたよるかという社会が抱える問題を考える。ほとんどの人はなんらかの形で介護するので、このような人々の集団から、ランダム・マッチングにペアを組んでゲームをプレイする。このとき、双方とも自宅を選択が3、一方が自宅を選択し他方は施設を選択すると、最近の時代背景もあり、疲れもあるので、施設を選択したほうが5、自宅選択が2、逆に双方とも施設選択は、世間を気にして1という利得適応度を示したのが、タカ・ハトゲームの表3である。

自宅で介護の期待利得 $\gamma(H)=3p+2(1-p)$

施設で介護の期待利得 $\gamma(F)=5p+1-p$

Mar. 2011

進化ゲームと社会制度に関するノート

$$\text{平均利得 } \bar{\gamma} = p\gamma(H) + (1-p)\gamma[F] = -3p^2 + 5p + 1$$

(7) より

$$\frac{dp}{dt} = p[\gamma(H) - \bar{\gamma}] = 3p^3 - 4p^2 + p = p(3p-1)(p-1)$$

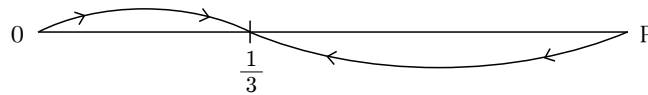


図 4

図 4 より, 3 つのナッシュ均衡 $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1/3, 2/3)$ が存在し, 進化的安定戦略は混合戦略の $(1/3, 2/3)$ のみである。

次にタカ・ハトゲームの進化安定戦略が $(1/3, 2/3)$ であることを証明する。

$$s = (1/3, 2/3) \quad \psi = (\sigma, 1-\sigma) \quad (\sigma \neq 1/3) \text{ を考える}$$

$$u(s, s) = (1/3, 2/3) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = 7/3$$

$$u(\psi, s) = (\sigma, 1-\sigma) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = 7/3$$

$u(s, s) = u(\psi, s)$ であるから, 進化的に安定であるためには
 $u(s, \psi) > u(\psi, \psi)$ でなければならない

$$u(s, \psi) = (1/3, 2/3) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ 1-\sigma \end{pmatrix} = \frac{9\sigma+4}{3}$$

$$u(\psi, \psi) = (\sigma, 1-\sigma) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ 1-\sigma \end{pmatrix} = -3\sigma^2 + 5\sigma + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore u(s, \psi) - u(\psi, \psi) &= \frac{9\sigma+4}{3} - (-3\sigma^2 + 5\sigma + 1) \\ &= \sigma^2 - 2\sigma + 1 = (1-\sigma)^2 > 0 \end{aligned}$$

V おわりに

囚人のジレンマゲームでは定常状態 $(0, 1)$, $(1, 0)$ 以外では常に $(1, 0)$ に向かう。すなわちこの例では, 故郷納税に協力しない N に解が収束することが得られ, タカ・ハトゲームでは定常状態をはずれると混合戦略均衡に収束し, したがって進化安定は混合戦略のみである。このように囚人のジレンマゲームやタカ・ハトゲームのように単一集団の場合は, 対称行列として利得も 1 式より一方のプレイヤーの利得のみを考えればよく, その動学化もシンプルな位相図であらわされたが, 男女の争いゲームのように複数集団となる場合は, 非対称行列となって, 複数の集団での相互依存が繰り返され, より複雑な

位相図となることが示され、しかも進化安定戦略 ESS は依然として成立している。さらには、ここでの事例からも明らかなように、ナッシュ均衡が必ずしも ESS とは限らないが、ESS は、ナッシュ均衡であることが確認された。

以上、進化ゲームは、人々が日常生活していくうえでの約束やとりきめを、先見性、合理性に基づいたノイマン的プレイヤーでもなく、また効率性を重視しないスミスのプレイヤーでもない、いわゆる限られた意味で合理的な行動を行うプレイヤー（限定合理的プレイヤー）によって成立していくことが多く見受けられることを分析した。これより社会で成立していく制度や諸習慣は大多数の人々が無理なく受け入れられたもの (ESS) であって、その時代背景や便益を考慮して成立していくことが予測される。したがって、そこに突然変異体 (mutant) が侵入することは難しいといえる。

注

1) 岡田章 (1996) p367-369 青木昌彦／奥野正寛 (編著) (1997) p75

2) たとえば青木昌彦／奥野正寛 (編著) (1997) P278参照

3) E, N, Barron (2008) 6 章, Hans Peter (2008) 8 章, 15 章

4) 青木昌彦／奥野正寛 (編著) P284参照

5) (5) の左辺は $u(s, \varepsilon g + (1-\varepsilon)s)$

$$\begin{aligned} &= (s, 1-s)A \begin{pmatrix} \varepsilon g + (1-\varepsilon)s \\ \varepsilon(1-g) + (1-\varepsilon)(1-s) \end{pmatrix} \\ &= SA[\varepsilon G + (1-\varepsilon)S]' = \varepsilon SAG' + (1-\varepsilon)SAS' \\ &= \varepsilon u(s, g) + (1-\varepsilon)u(s, s) \end{aligned}$$

(5) の右辺は $u(g, \varepsilon g + (1-\varepsilon)s)$

$$\begin{aligned} &= (g, 1-g)A \begin{pmatrix} \varepsilon g + (1-\varepsilon)s \\ \varepsilon(1-g) + (1-\varepsilon)(1-s) \end{pmatrix} \\ &= GA[\varepsilon G + (1-\varepsilon)S]' = \varepsilon SAG' + (1-\varepsilon)GAS' \\ &= \varepsilon u(g, g) + (1-\varepsilon)u(g, s) \end{aligned}$$

6) E, N, Barron (2008) P313-314

7) Graham Rump (1997) p236, Hans Peter (2008) p115参照

参考文献

E, N, Barron (2008) Game theory an introduction. John Wiley & son

Graham Rump (1997) Game theory introduction and application. Oxford University Press, Oxford New York

Hans Peters (2008) Game theory a multi — leveled approach. Springer — Verlag, Berlin Heidelberg

Herbert Gintis (2009) Game theory evolving. Princeton University Press

Maynard Smith J Price G R (1973) Logic animal conflict. Nature 246 15-18

Maynard Smith J (1982) Evolution and the theory of games. Cambridge University Press, UK

von Neumann, J. and O, Morgenstern (1944), Theory of games and economic behavior. Princeton University Press. (銀林 浩他訳『ゲーム理論と経済行動』東京図書)。

青木昌彦／奥野正寛 (編著) (1997)『経済システムの比較制度分析』東京大学出版会

岡田章 (1996)『ゲーム理論』有斐閣

岡田章 (2008)『ゲーム理論・入門』有斐閣

(2010年11月26日掲載決定)