

ファジィシステムの逆問題と同定問題

和 泉 孔 二

Inverse and Identification Problems of Fuzzy Systems

Koji IZUMI

1. は じ め に

Goguen²⁾は、Zadeh¹¹⁾によって提案されたファジィ集合を L -ファジィ集合へと拡張し、真理値集合 L を完備束半群に限定した場合の L -ファジィ論理³⁾を展開している。

一方、Sanchez⁸⁾は真理値集合 L を完備Brouwer束に限定した場合の \odot -合成ファジィ関係式の解法を示し、 \odot -合成に基づくファジィシステムの逆問題および同定問題に最大解を与えた。ここで、 \odot -合成とは、 $L = [0, 1]$ の場合のSup-min合成を一般化したものである。以後、これに関連した種々の応用研究^{1), 4)}がなされている。また、逆問題の解法については、Pappis・菅野⁷⁾、塚本・田代¹⁰⁾、筆者⁵⁾らによってさらに進んだ研究が行われている。

本論文では、まず、 \oplus -合成および ∇ -合成という2つのファジィ関係の合成を定義する。この2つの合成を用いることにより、 $A \oplus R = B$ という合成ファジィ関係式によって記述されるファジィ入出力システム(\oplus -ファジィシステム)と $A \nabla R = B$ という合成ファジィ関係式によって記述されるファジィ入出力システム(∇ -ファジィシステム)とが定式化される。ただし、 A はファジィ入力、 B はファジィ出力とする。

次に、完備束半群 L の双対完備束半群 $L^{(d)}$ を考察することにより、 \oplus -合成に双対な \boxplus -合成および ∇ -合成に双対な \boxnabla -合成を定義する。これら2つの合成を用いて、 \boxplus -ファジィシステムと \boxnabla -ファジィシステムとがそれぞれ、 $A \boxplus R = B$ 、 $A \boxnabla R = B$ という合成ファジィ関係式によって定式化されることになる。

以上の4種類のファジィシステムの逆問題および同定問題を統一的に取り扱うのが本論文の目的である。その際、これらのファジィシステムの間の随伴性および双対性が重要な役割りを演じるのである。

2. 準 備

ここでは、以下の議論に必要な完備束半群、双対完備束半群および束における随伴性に関することから述べる。

〔定義1〕 完備束 L が完備束半群であるとは、上限(\vee)、下限(\wedge)の演算の他に、次のような条件を満足する乗法演算 $*$ が定義されている場合をいう。すなわち、 L は $*$ に関して単位元をもつ半群をなし、任意の $a, a_i, b, b_i \in L$ に対して

$$\left. \begin{aligned} a * \bigvee_{i \in \emptyset} b_i &= \bigvee_{i \in \emptyset} (a * b_i) \\ (\bigvee_{i \in \emptyset} a_i) * b &= \bigvee_{i \in \emptyset} (a_i * b) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

が成立する。ただし、添字集合 \emptyset は任意濃度とする。また、以下の議論では、任意の $a \in L$ に対して

$$O * a = a * O = O \quad (2)$$

$$I * a = a * I = a \quad (3)$$

が成立するものとしておく。ただし、 O と I はそれぞれ L における最小元および最大元を表す。

〔定義2〕 完備束 $L^{(d)}$ が双対完備束半群であるとは、完備束としての演算の他に、次のような加法演算 $\#$ が定義されている場合をいう。すなわち、 $L^{(d)}$ は $\#$ に関して単位元をもつ半群をなし、

$$\left. \begin{aligned} a \# \bigwedge_{i \in \emptyset} b_i &= \bigwedge_{i \in \emptyset} (a \# b_i) \\ (\bigwedge_{i \in \emptyset} a_i) \# b &= \bigwedge_{i \in \emptyset} (a_i \# b) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

が成立する。また、以下の議論では、任意の $a \in L^{(d)}$ に対して

$$O \# a = a \# O = a \quad (5)$$

$$I \# a = a \# I = I \quad (6)$$

が成立するものとしておく。ただし、 O と I はそれぞれ $L^{(d)}$ における最小元および最大元を表す。

(注意) 特殊な場合として、 $L = [0, 1]$ は完備束半群であり、かつ双対完備束半群である。このとき、乗法演算 $*$ としては $t\text{-norm}^{9)}$ 、加法演算 $\#$ としては $t\text{-conorm}^{9)}$ を構成するものが考えられる。

さて、以下に、束における随伴性の概念を述べよう。これは圏論でより一般的に取り扱われる概念であり、本論文で議論されるファジィシステムの随伴性の基礎となるものである。

〔定義3〕 2つの束 L_1, L_2 に対し、

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ L_1 & \xleftrightarrow{\quad} & L_2 \\ & g & \end{array}$$

なる 2 つの関数 f, g が

$$f(q) \leq p \iff q \leq g(p) \quad (7)$$

$$(\forall p \in L_1 \quad \forall q \in L_2)$$

という条件を満たすとき, f は g の左随伴である, または g は f の右随伴であると呼び, 記号で

$$f \multimap g \quad (8)$$

と表す。

3. 随伴的なファジィシステムと双対的なファジィシステム

完備束半群 L における乗法演算 $*$ は L -ファジィ論理での連言演算であり, 含意演算 $\overset{*}{\rightarrow}$ は次のように定義される。すなわち, 任意の $a, b \in L$ に対して

$$a \overset{*}{\rightarrow} b = \bigvee \{x \in L \mid a * x \leq b\} \quad (9)$$

と表される。このとき, $*$ と $\overset{*}{\rightarrow}$ との間には

$$a * x \leq b \iff x \leq a \overset{*}{\rightarrow} b \quad (10)$$

という関係が成立する。この関係は次のように一般化される。すなわち, 任意の $a, b, c \in L$ に対し

$$a * c \leq b \iff c \leq a \overset{*}{\rightarrow} b \quad (11)$$

が成立する。したがって, 定義 3 により, 完備束半群 L においては, $a *$ という関数は $a \overset{*}{\rightarrow}$ という関数の左随伴になっていると見なすことができる。記号では

$$a * \multimap a \overset{*}{\rightarrow} \quad (12)$$

と表される。

同様に, 双対完備束半群 $L^{(d)}$ における加法演算 $\#$ は L -ファジィ論理に双対な論理 ($L^{(d)}$ -ファジィ論理) での選言演算であり, 双対含意演算 $\overset{*}{\leftarrow\#}$ は任意の $a, b \in L^{(d)}$ に対して

$$a \overset{*}{\leftarrow\#} b = \bigwedge \{x \in L^{(d)} \mid a \# x \geq b\} \quad (13)$$

と定義される。このとき, 任意の $a, b, c \in L^{(d)}$ に対し

$$a \# c \geq b \iff c \geq a \overset{*}{\leftarrow\#} b \quad (14)$$

が成立する。したがって, 定義 3 により, 双対完備束半群 $L^{(d)}$ において, $a \#$ という関数は a

$\leftarrow \#$ という関数の右随伴になっていると見なすことができる。記号では

$$a \# \text{ ————— } a \leftarrow \# \quad (15)$$

と表される。

さて、本論文で取り扱うファジィシステムを定式化するために必要な4種類の合成を以下に定義しよう。ただし、 $\mathcal{L}(X)$ は集合 X 上の L -ファジィ集合全体のクラスを表し、 $\mathcal{L}^{(d)}(X)$ は集合 X 上の $L^{(d)}$ -ファジィ集合全体のクラスを表すものとする。また、以後、 L -ファジィ集合と $L^{(d)}$ -ファジィ集合とを総称してファジィ集合と呼ぶことにする。

〔定義4〕 2つのファジィ関係 $Q \in \mathcal{L}(W \times X)$ と $R \in \mathcal{L}(X \times Y)$ に対し、 $Q \oplus R \in \mathcal{L}(W \times Y)$ および $Q \otimes R \in \mathcal{L}(W \times Y)$ を

$$(Q \oplus R)(w, y) = \bigvee_{x \in X} [Q(w, x) * R(x, y)] \quad (16)$$

$$(Q \otimes R)(w, y) = \bigwedge_{x \in X} [Q(w, x) \overset{*}{\rightarrow} R(x, y)] \quad (17)$$

$$(\forall w \in W \quad \forall y \in Y)$$

と定義し、それぞれ \oplus -合成および \otimes -合成と呼ぶ。

〔定義5〕 2つのファジィ関係 $Q \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times X)$ と $R \in \mathcal{L}^{(d)}(X \times Y)$ に対し、 $Q \boxplus R \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times Y)$ および $Q \boxotimes R \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times Y)$ を

$$(Q \boxplus R)(w, y) = \bigwedge_{x \in X} [Q(w, x) \# R(x, y)] \quad (18)$$

$$(Q \boxotimes R)(w, y) = \bigvee_{x \in X} [Q(w, x) \leftarrow \# R(x, y)] \quad (19)$$

$$(\forall w \in W \quad \forall y \in Y)$$

と定義し、それぞれ \boxplus -合成および \boxotimes -合成と呼ぶ。

いま、これらの4種類の合成に基づいて、以下のように4つのファジィシステムが定式化される。すなわち、入力空間を X 、出力空間を Y とし、システム表現を $R \in \mathcal{L}(X \times Y)$ とするとき、ファジィ入力 $A \in \mathcal{L}(X)$ に対して、ファジィ出力 $B \in \mathcal{L}(Y)$ が \oplus -合成により

$$A \oplus R = B \quad (20)$$

というように与えられるファジィ入出力システムを \oplus -ファジィシステムと呼ぶ。また、ファジィ出力 B が \otimes -合成により

$$A \otimes R = B \quad (21)$$

というように与えられるファジィ入出力システムを \otimes -ファジィシステムと呼ぶ。同様にして、

システム表現を $R \in \mathcal{L}^{(d)}(X \times Y)$ とするとき、ファジィ入力 $A \in \mathcal{L}^{(d)}(X)$ に対して、ファジィ出力 $B \in \mathcal{L}^{(d)}(Y)$ が \boxplus -合成により

$$A \boxplus R = B \quad (22)$$

というように与えられる \boxplus -ファジィシステム、および \boxminus -合成により

$$A \boxminus R = B \quad (23)$$

というように与えられる \boxminus -ファジィシステムが定式化される。

次に、これら4種類のファジィシステムを取り扱うための準備として、完備束半群および双対完備束半群に関する性質を述べよう。すなわち、 L を完備束半群とすると、任意の $a, b, c \in L$ に対し、

$$a * (a \overset{*}{\rightarrow} b) \leq b \quad (24)$$

$$a \overset{*}{\rightarrow} (a * b) \geq b \quad (25)$$

$$a \overset{*}{\rightarrow} (b \vee c) \geq (a \overset{*}{\rightarrow} b) \vee (a \overset{*}{\rightarrow} c) \quad (26)$$

$$a \overset{*}{\rightarrow} (b \wedge c) = (a \overset{*}{\rightarrow} b) \wedge (a \overset{*}{\rightarrow} c) \quad (27)$$

$$(a \vee b) \overset{*}{\rightarrow} c = (a \overset{*}{\rightarrow} c) \wedge (b \overset{*}{\rightarrow} c) \quad (28)$$

$$(a \wedge b) \overset{*}{\rightarrow} c \geq (a \overset{*}{\rightarrow} c) \vee (b \overset{*}{\rightarrow} c) \quad (29)$$

$$a \leq b \implies a \overset{*}{\rightarrow} c \geq b \overset{*}{\rightarrow} c \quad (30)$$

$$a \leq b \implies c \overset{*}{\rightarrow} a \leq c \overset{*}{\rightarrow} b \quad (31)$$

が成立する。また、 $L^{(d)}$ を双対完備束半群とすると、任意の $a, b, c \in L^{(d)}$ に対し、

$$a \# (a \overset{\leftarrow}{\#} b) \geq b \quad (32)$$

$$a \overset{\leftarrow}{\#} (a \# b) \leq b \quad (33)$$

$$a \overset{\leftarrow}{\#} (b \wedge c) \leq (a \overset{\leftarrow}{\#} b) \wedge (a \overset{\leftarrow}{\#} c) \quad (34)$$

$$a \overset{\leftarrow}{\#} (b \vee c) = (a \overset{\leftarrow}{\#} b) \vee (a \overset{\leftarrow}{\#} c) \quad (35)$$

$$(a \wedge b) \overset{\leftarrow}{\#} c = (a \overset{\leftarrow}{\#} c) \vee (b \overset{\leftarrow}{\#} c) \quad (36)$$

$$(a \vee b) \overset{\leftarrow}{\#} c \leq (a \overset{\leftarrow}{\#} c) \wedge (b \overset{\leftarrow}{\#} c) \quad (37)$$

$$a \geq b \implies a \overset{\leftarrow}{\#} c \leq b \overset{\leftarrow}{\#} c \quad (38)$$

$$a \geq b \implies c \overset{\leftarrow}{\#} a \geq c \overset{\leftarrow}{\#} b \quad (39)$$

が成立することに注意する。

さて、 \boxplus -ファジィシステムは、ファジィ入力 $A \in \mathcal{L}(X)$ とシステム表現 $R \in \mathcal{L}(X \times Y)$

に対し, ファジィ出力 $B \in \mathcal{L}(Y)$ が

$$(A \textcircled{+} R)(y) = \bigvee_{x \in X} [A(x) * R(x, y)] \quad (\forall y \in Y) \quad (40)$$

というように与えられるので, 固定された R に対し, 入出力間には

$$A \subseteq A' \implies B \subseteq B' \quad (41)$$

なる関係がある。また, $\textcircled{+}$ -ファジィシステムは $\textcircled{+}$ -ファジィシステムとは双対的に定義され, ファジィ入力 $A \in \mathcal{L}^{(d)}(X)$ とシステム表現 $R \in \mathcal{L}^{(d)}(X \times Y)$ に対し, ファジィ出力 $B \in \mathcal{L}^{(d)}(Y)$ が

$$(A \textcircled{-} R)(y) = \bigwedge_{x \in X} [A(x) \# R(x, y)] \quad (\forall y \in Y) \quad (42)$$

というように与えられるので, 固定された R に対し, 入出力間には

$$A \subseteq A' \implies B \supseteq B' \quad (43)$$

なる関係がある。したがって, $\textcircled{+}$ -ファジィシステムおよび $\textcircled{-}$ -ファジィシステムは, 入力が大きくなれば, それに対して出力も大きくなるという特性をもっている。

一方, $\textcircled{\vee}$ -ファジィシステムは, ファジィ入力 $A \in \mathcal{L}(X)$ とシステム表現 $R \in \mathcal{L}(X \times Y)$ に対し, ファジィ出力 $B \in \mathcal{L}(Y)$ が

$$(A \textcircled{\vee} R)(y) = \bigwedge_{x \in X} [A(x) \overset{*}{\rightarrow} R(x, y)] \quad (\forall y \in Y) \quad (44)$$

というように与えられる。このとき, 式(30)により, 固定された R に対し, 入出力間には

$$A \subseteq A' \implies B \supseteq B' \quad (45)$$

なる関係があることがわかる。また, $\textcircled{\vee}$ -ファジィシステムは $\textcircled{\vee}$ -ファジィシステムとは双対的に定義され, ファジィ入力 $A \in \mathcal{L}^{(d)}(X)$ とシステム表現 $R \in \mathcal{L}^{(d)}(X \times Y)$ に対し, ファジィ出力 $B \in \mathcal{L}^{(d)}(Y)$ が

$$(A \textcircled{\vee} B)(y) = \bigvee_{x \in X} [A(x) \overset{\#}{\leftarrow} R(x, y)] \quad (\forall y \in Y) \quad (46)$$

というように与えられる。このとき, 式(38)により, 固定された R に対し, 入出力間には

$$A \subseteq A' \implies B \supseteq B' \quad (47)$$

なる関係があることがわかる。したがって、 $\textcircled{\text{V}}$ -ファジィシステムおよび $\textcircled{\text{V}}$ -ファジィシステムは、入力が大きくなれば、それに対して出力は小さくなるという特性をもっている。

次に、 $\textcircled{\text{A}}$ -ファジィシステムと $\textcircled{\text{V}}$ -ファジィシステムとの随伴性、および $\textcircled{\text{A}}$ -ファジィシステムと $\textcircled{\text{V}}$ -ファジィシステムとの随伴性に関する定理を示そう。その証明には、式(11)で表される完備束半群 L における2つの演算 $*$ と $\overset{*}{\rightarrow}$ との随伴性、および式(14)で表される双対完備束半群 $L^{(d)}$ における2つの演算 $\#$ と $\overset{*}{\leftarrow}$ との随伴性を用いている。ただし、ファジィ関係 $Q \in \mathcal{L}(W \times X)$ に対する転置ファジィ関係を $Q^t \in \mathcal{L}(X \times W)$ と表している。

〔定理1〕 $Q \in \mathcal{L}(W \times X)$, $R \in \mathcal{L}(X \times Y)$, $T \in \mathcal{L}(W \times Y)$ に対し,

$$Q \textcircled{\text{A}} R \subseteq T \iff R \subseteq Q^t \textcircled{\text{V}} T \quad (48)$$

が成立する。

(証明)

$$\begin{aligned} & Q \textcircled{\text{A}} R \subseteq T \\ \iff & \bigvee_{x \in X} [Q(w, x) * R(x, y)] \leq T(w, y) \quad (\forall w \in W \quad \forall y \in Y) \\ \iff & Q(w, x) * R(x, y) \leq T(w, y) \quad (\forall w \in W \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y) \\ \iff & R(x, y) \leq Q(w, x) \overset{*}{\rightarrow} T(w, y) \quad (\forall w \in W \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y) \\ \iff & R(x, y) \leq \bigwedge_{w \in W} [Q(w, x) \overset{*}{\rightarrow} T(w, y)] \quad (\forall x \in X \quad \forall y \in Y) \\ \iff & R \subseteq Q^t \textcircled{\text{V}} T \end{aligned}$$

(Q. E. D.)

〔定理2〕 $Q \in \mathcal{L}(W \times X)$, $R \in \mathcal{L}(X \times T)$, $T \in \mathcal{L}(W \times Y)$ に対し

$$Q \textcircled{\text{V}} R \supseteq T \iff R \supseteq Q^t \textcircled{\text{A}} T \quad (49)$$

が成立する。

この定理の証明は、定理1の証明と同様に考えられるので省略する。

〔定理3〕 $Q \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times X)$, $R \in \mathcal{L}^{(d)}(X \times Y)$, $T \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times Y)$ に対し,

$$Q \textcircled{\text{A}} R \supseteq T \iff R \supseteq Q^t \textcircled{\text{V}} T \quad (50)$$

が成立する。

(証明)

$$\begin{aligned} & Q \textcircled{\text{A}} R \supseteq T \\ \iff & \bigwedge_{x \in X} [Q(w, x) \# R(x, y)] \geq T(w, y) \quad (\forall w \in W \quad \forall y \in Y) \\ \iff & Q(w, x) \# R(x, y) \geq T(w, y) \quad (\forall w \in W \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y) \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow R(x, y) \geq Q(w, x) \stackrel{\#}{\leftarrow} T(w, y) \quad (\forall w \in W \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y)$$

$$\Longleftrightarrow R(x, y) \geq \bigvee_{w \in W} [Q(w, x) \stackrel{\#}{\leftarrow} T(w, y)] \quad (\forall x \in X \quad \forall y \in Y)$$

$$\Longleftrightarrow R \supseteq Q^t \sqcup T$$

(Q. E. D.)

〔定理4〕 $Q \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times X)$, $R \in \mathcal{L}^{(d)}(X \times Y)$, $T \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times Y)$ に対し,

$$Q \sqcup R \subseteq T \Longleftrightarrow R \subseteq Q^t \sqcup T \quad (51)$$

が成立する。

この定理の証明は、定理3の証明と同様に考えられるので省略する。

定理1および定理2から、 $\textcircled{\mathbb{A}}$ -ファジィシステムと $\textcircled{\mathbb{V}}$ -ファジィシステムは互いに随伴的であることがわかる。すなわち、式(48)および式(49)において、 t は転置ファジィ関係を表しているだけであるから無視すれば、形式的に

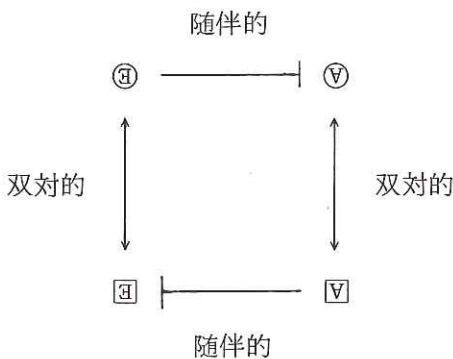
$$Q \textcircled{\mathbb{A}} \longrightarrow \mid Q \textcircled{\mathbb{V}} \quad (52)$$

と見なすことができる。したがって、 $\textcircled{\mathbb{A}}$ -ファジィシステムを構成する $\textcircled{\mathbb{A}}$ -合成は、 $\textcircled{\mathbb{V}}$ -ファジィシステムを構成する $\textcircled{\mathbb{V}}$ -合成の左随伴になっていると考えられる。また、定理3および定理4から、 $\textcircled{\mathbb{A}}$ -ファジィシステムと $\textcircled{\mathbb{V}}$ -ファジィシステムは互いに随伴的であり、形式的に

$$Q \textcircled{\mathbb{A}} \mid \longrightarrow Q \textcircled{\mathbb{V}} \quad (53)$$

が成立していることがわかる。したがって、 $\textcircled{\mathbb{A}}$ -ファジィシステムを構成する $\textcircled{\mathbb{A}}$ -合成は、 $\textcircled{\mathbb{V}}$ -ファジィシステムを構成する $\textcircled{\mathbb{V}}$ -合成の右随伴になっていると考えられる。

以上のことから、4種類ファジィシステム間の随伴性および双対性に関して、次のように形式的に表すことができる。



4. 逆問題と同定問題の解法

一般に、ファジィシステムの逆問題とは、システム表現 R とファジィ出力 B が与えられているときにファジィ入力 A を求める問題のことである。また、ファジィシステムの同定問題とは、ファジィ入出力の対 $(A_i, B_i) (i = 1, \dots, n)$ が与えられているときにシステム表現 R を求める問題のことをいう。

㊸-ファジィシステムに関する同定問題とは、与えられた2つのファジィ関係 $Q \in \mathcal{L}(W \times X)$, $T \in \mathcal{L}(W \times Y)$ に対し、

$$Q \textcircled{\text{㊸}} R = T \quad (54)$$

となるような $R \in \mathcal{L}(X \times Y)$ を求めることであると言い換えることができる。ただし、集合 W の要素の個数を n としている。また、㊸-ファジィシステムに関する逆問題は、 $n = 1$ の場合に、与えられた2つのファジィ関係 $R \in \mathcal{L}(X \times Y)$, $T \in \mathcal{L}(W \times Y)$ に対し、式(54)を満たすような $Q \in \mathcal{L}(W \times X)$ を求めることであるといえる。同様に、㊹-ファジィシステム、㊺-ファジィシステム、㊻-ファジィシステムに関する逆問題および同定問題を考えることができる。

次に、㊸-ファジィシステムに関する逆問題および同定問題を考察するのに重要な定理を導く。

〔補題1〕 $A, A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X)$ および $R, R_1, R_2 \in \mathcal{L}(X \times Y)$ に対し、

$$\textcircled{1} \quad (A_1 \cup A_2) \textcircled{\text{㊸}} R = (A_1 \textcircled{\text{㊸}} R) \cup (A_2 \textcircled{\text{㊸}} R) \quad (55)$$

$$\textcircled{2} \quad (A_1 \cap A_2) \textcircled{\text{㊸}} R \subseteq (A_1 \textcircled{\text{㊸}} R) \cap (A_2 \textcircled{\text{㊸}} R) \quad (56)$$

$$\textcircled{3} \quad A \textcircled{\text{㊸}} (R_1 \cup R_2) = (A \textcircled{\text{㊸}} R_1) \cup (A \textcircled{\text{㊸}} R_2) \quad (57)$$

$$\textcircled{4} \quad A \textcircled{\text{㊸}} (R_1 \cap R_2) \subseteq (A \textcircled{\text{㊸}} R_1) \cap (A \textcircled{\text{㊸}} R_2) \quad (58)$$

が成立する。

(証明) ①と③、および②と④はそれぞれ同様に証明できるので、①と②だけを証明する。

①について：

$$\begin{aligned} & [(A_1 \cup A_2) \textcircled{\text{㊸}} R](y) \\ &= \bigvee_{x \in X} [(A_1(x) \vee A_2(x)) * R(x, y)] \\ &= \bigvee_{x \in X} [(A_1(x) * R(x, y)) \vee (A_2(x) * R(x, y))] \quad (\text{式(1)による}) \\ &= \bigvee_{x \in X} [A_1(x) * R(x, y)] \vee \bigvee_{x \in X} [A_2(x) * R(x, y)] \\ &= (A_1 \textcircled{\text{㊸}} R)(y) \vee (A_2 \textcircled{\text{㊸}} R)(y) \end{aligned}$$

$$= [(A_1 \oplus R)(y) \cup (A_2 \oplus R)(y)](y)$$

②について：

$$\begin{aligned} & [(A_1 \cap A_2) \oplus R](y) \\ &= \bigvee_{x \in X} [(A_1(x) \wedge A_2(x)) * R(x, y)] \\ &\leq \bigvee_{x \in X} [(A_1(x) * R(x, y)) \wedge (A_2(x) * R(x, y))] \\ &\leq \bigvee_{x \in X} [A_1(x) * R(x, y)] \wedge \bigvee_{x \in X} [A_2(x) * R(x, y)] \\ &\quad \text{(Min-Max 不等式による)} \end{aligned}$$

$$= (A_1 \oplus R)(y) \wedge (A_2 \oplus R)(y)$$

$$= [(A_1 \oplus R) \cap (A_2 \oplus R)](y)$$

(Q. E. D.)

〔定理5〕 \oplus -ファジィシステムに関する逆問題に対しては、解集合が空でないとすれば、最大解は存在するが、最小解は存在するとは限らない。また、同定問題に対しても解集合が空でないとすれば、最大解は存在するが、最小解は存在するとは限らない。

(証明) まず、逆問題に対して、 $R \in \mathcal{L}(X \times Y)$ と $B \in \mathcal{L}(Y)$ とが与えられたときに、解集合

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{L}(X) \mid A \oplus R = B\} \quad (59)$$

を考える。ここで、 $\mathcal{A} \ni \phi$ ということから、 $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ とする。このとき、補題1より

$$(A_1 \cup A_2) \oplus R = B \cup B = B \quad (60)$$

$$(A_1 \cap A_2) \oplus R \subseteq B \cap B = B \quad (61)$$

となるので、 $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$ は成立するが、 $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ は成立するとは限らない。したがって、最大解は存在し、最小解は存在するとは限らない。また、同定問題に対しても同様に考えられる。

(Q. E. D.)

次に、 \odot -ファジィシステムに関する逆問題および同定問題を考察するのに重要な定理を導く。

〔補題2〕 $A, A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X)$ および $R, R_1, R_2 \in \mathcal{L}(X \times Y)$ に対し、

$$\textcircled{1} \quad (A_1 \cup A_2) \odot R = (A_1 \odot R) \cap (A_2 \odot R) \quad (62)$$

$$\textcircled{2} \quad (A_1 \cap A_2) \odot R \supseteq (A_1 \odot R) \cup (A_2 \odot R) \quad (63)$$

$$\textcircled{3} \quad A \odot (R_1 \cup R_2) \supseteq (A \odot R_1) \cup (A \odot R_2) \quad (64)$$

$$\textcircled{4} \quad A \odot (R_1 \cap R_2) = (A \odot R_1) \cap (A \odot R_2) \quad (65)$$

が成立する。

(証明)

①について:

$$\begin{aligned}
 & \llbracket (A_1 \cup A_2) \mathbin{\mathbb{V}} R \rrbracket(y) \\
 &= \bigwedge_{x \in X} \llbracket (A_1(x) \vee A_2(x)) \overset{*}{\rightarrow} R(x, y) \rrbracket \\
 &= \bigwedge_{x \in X} \llbracket (A_1(x) \overset{*}{\rightarrow} R(x, y)) \wedge (A_2(x) \overset{*}{\rightarrow} R(x, y)) \rrbracket \\
 &\quad \quad \quad (\text{式 (28) による}) \\
 &= \bigwedge_{x \in X} \llbracket A_1(x) \overset{*}{\rightarrow} R(x, y) \rrbracket \wedge \bigwedge_{x \in X} \llbracket A_2(x) \overset{*}{\rightarrow} R(x, y) \rrbracket \\
 &= (A_1 \mathbin{\mathbb{V}} R)(y) \wedge (A_2 \mathbin{\mathbb{V}} R)(y) \\
 &= \llbracket (A_1 \mathbin{\mathbb{V}} R) \cap (A_2 \mathbin{\mathbb{V}} R) \rrbracket(y)
 \end{aligned}$$

②について:

$$\begin{aligned}
 & \llbracket (A_1 \cap A_2) \mathbin{\mathbb{V}} R \rrbracket(y) \\
 &= \bigwedge_{x \in X} \llbracket (A_1(x) \wedge A_2(x)) \overset{*}{\rightarrow} R(x, y) \rrbracket \\
 &\geq \bigwedge_{x \in X} \llbracket (A_1(x) \overset{*}{\rightarrow} R(x, y)) \vee (A_2(x) \overset{*}{\rightarrow} R(x, y)) \rrbracket \\
 &\quad \quad \quad (\text{式 (29) による}) \\
 &\geq \bigwedge_{x \in X} \llbracket A_1(x) \overset{*}{\rightarrow} R(x, y) \rrbracket \vee \bigwedge_{x \in X} \llbracket A_2(x) \overset{*}{\rightarrow} R(x, y) \rrbracket \\
 &\quad \quad \quad (\text{Min - Max 不等式による}) \\
 &= (A_1 \mathbin{\mathbb{V}} R)(y) \vee (A_2 \mathbin{\mathbb{V}} R)(y) \\
 &= \llbracket (A_1 \mathbin{\mathbb{V}} R) \cup (A_2 \mathbin{\mathbb{V}} R) \rrbracket(y)
 \end{aligned}$$

③について

$$\begin{aligned}
 & \llbracket A \mathbin{\mathbb{V}} (R_1 \cup R_2) \rrbracket(y) \\
 &= \bigwedge_{x \in X} \llbracket A(x) \overset{*}{\rightarrow} (R_1(x, y) \vee R_2(x, y)) \rrbracket \\
 &\geq \bigwedge_{x \in X} \llbracket (A(x) \overset{*}{\rightarrow} R_1(x, y)) \vee (A(x) \overset{*}{\rightarrow} R_2(x, y)) \rrbracket \\
 &\quad \quad \quad (\text{式 (26) による}) \\
 &\geq \bigwedge_{x \in X} \llbracket A(x) \overset{*}{\rightarrow} R_1(x, y) \rrbracket \vee \bigwedge_{x \in X} \llbracket A(x) \overset{*}{\rightarrow} R_2(x, y) \rrbracket \\
 &\quad \quad \quad (\text{Min - Max 不等式による}) \\
 &= (A \mathbin{\mathbb{V}} R_1)(y) \vee (A \mathbin{\mathbb{V}} R_2)(y) \\
 &= \llbracket (A \mathbin{\mathbb{V}} R_1) \cup (A \mathbin{\mathbb{V}} R_2) \rrbracket(y)
 \end{aligned}$$

④について：

$$\begin{aligned}
 & [A \textcircled{\vee} (R_1 \cap R_2)](y) \\
 &= \bigwedge_{x \in X} [A(x) \overset{*}{\rightarrow} (R_1(x, y) \wedge R_2(x, y))] \\
 &= \bigwedge_{x \in X} [(A(x) \overset{*}{\rightarrow} R_1(x, y)) \wedge (A(x) \overset{*}{\rightarrow} R_2(x, y))] \\
 &\hspace{15em} (\text{式 (27) による}) \\
 &= \bigwedge_{x \in X} [A(x) \overset{*}{\rightarrow} R_1(x, y)] \wedge \bigwedge_{x \in X} [A(x) \overset{*}{\rightarrow} R_2(x, y)] \\
 &= (A \textcircled{\vee} R_1)(y) \wedge (A \textcircled{\vee} R_2)(y) \\
 &= [(A \textcircled{\vee} R_1) \cap (A \textcircled{\vee} R_2)](y)
 \end{aligned}$$

(Q. E. D.)

〔定理 6〕 $\textcircled{\vee}$ -ファジィシステムに関する逆問題に対しては、解集合が空でないとすれば、最大解は存在するが、最小解は存在するとは限らない。また、同定問題に対しては、解集合が空でないとすれば、最小解は存在するが、最大解は存在するとは限らない。

この定理の証明は、定理 5 の証明と同様に考えられるので省略する。

さて、 $\textcircled{\oplus}$ -ファジィシステムに関する逆問題および同定問題の最大解が存在することは定理 5 で示されたが、それらを得るための定理を以下に述べよう。

〔補題 3〕 $Q \in \mathcal{L}(W \times X)$, $R \in \mathcal{L}(X \times Y)$, $T \in \mathcal{L}(W \times Y)$ に対し、

$$\textcircled{1} \quad Q^t \textcircled{\vee} (Q \textcircled{\oplus} R) \supseteq R \quad (66)$$

$$\textcircled{2} \quad (R \textcircled{\vee} (Q \textcircled{\oplus} R)^t)^t \supseteq Q \quad (67)$$

$$\textcircled{3} \quad Q \textcircled{\oplus} (Q^t \textcircled{\vee} T) \subseteq T \quad (68)$$

$$\textcircled{4} \quad (R \textcircled{\vee} T^t)^t \textcircled{\oplus} R \subseteq T \quad (69)$$

が成立する。

(証明) ①と②、および③と④はそれぞれ同様に証明できるので、①と③だけを証明する。

①について：

$$\begin{aligned}
 & [Q^t \textcircled{\vee} (Q \textcircled{\oplus} R)](x, y) \\
 &= \bigwedge_{w \in W} [Q(w, x) \overset{*}{\rightarrow} \{ \bigvee_{x \in X} (Q(w, x) * R(x, y)) \}] \\
 &= \bigwedge_{w \in W} [Q(w, x) \overset{*}{\rightarrow} \{ (Q(w, x) * R(x, y)) \vee \bigvee_{x' \neq x} (Q(w, x') * R(x', y)) \}] \\
 &\geq \bigwedge_{w \in W} [Q(w, x) \overset{*}{\rightarrow} (Q(w, x) * R(x, y))] \\
 &\hspace{15em} (\text{式 (26) による})
 \end{aligned}$$

$$\geq \bigwedge_{w \in W} R(x, y)$$

(式(25)による)

$$= R(x, y)$$

③について:

$$\begin{aligned}
 & [Q \oplus (Q^t \vee T)](w, y) \\
 &= \bigvee_{x \in X} [Q(w, x) * \{ \bigwedge_{w' \in W} (Q(w, x) \xrightarrow{*} T(w, y)) \}] \\
 &= \bigvee_{x \in X} [Q(w, x) * \{ (Q(w, x) \xrightarrow{*} T(w, y)) \\
 &\quad \bigwedge_{w' \preceq w} (Q(w', x) \xrightarrow{*} T(w', y)) \}] \\
 &\leq \bigvee_{x \in X} [Q(w, x) * (Q(w, x) \xrightarrow{*} T(w, y))] \\
 &\leq \bigvee_{x \in X} T(w, y) \\
 &= T(w, y)
 \end{aligned}$$

(式(24)による)

(Q. E. D.)

[定理 7]

① $Q \in \mathcal{L}(W \times X)$, $T \in \mathcal{L}(W \times Y)$ に対し,

$$\mathcal{R} = \{R \in \mathcal{L}(X \times Y) \mid Q \oplus R = T\} \quad (70)$$

とするとき, $\mathcal{R} \ni \phi$ であるための必要十分条件は, $Q^t \vee T$ が \mathcal{R} の最大元となることである。

② $R \in \mathcal{L}(X \times Y)$, $T \in \mathcal{L}(W \times Y)$ に対し,

$$\mathcal{Q} = \{Q \in \mathcal{L}(W \times X) \mid Q \oplus R = T\} \quad (71)$$

とするとき, $\mathcal{Q} \ni \phi$ であるための必要十分条件は, $(R \vee T^t)^t$ が \mathcal{Q} の最大元となることである。

(証明) ①, ②ともに十分であることは自明だから, 必要であることだけを証明する。

①について: $\mathcal{R} \ni \phi$ とすると, $Q \oplus R = T$ となるような R が少なくとも 1 つは存在する。このとき, 式(66)より

$$R \subseteq Q^t \vee (Q \oplus R) = Q^t \vee T$$

であり, ここで $\check{R} = Q^t \vee T$ とおくと, $R \subseteq \check{R}$ だから,

$$T = Q \oplus R \subseteq Q \oplus \check{R}$$

となる。一方, 式(68)より

$$Q \oplus \check{R} = Q \oplus (Q^t \vee T) \subseteq T$$

となる。したがって

$$Q \oplus \check{R} = T$$

が示された。すなわち、 $\check{R} = Q^t \vee T$ は \mathcal{R} の最大元である。

②について： $\mathcal{Q} \ni \phi$ とすると、 $Q \oplus R = T$ となるような Q が少なくとも1つは存在する。
このとき、式(67)より

$$Q \subseteq (R \vee (Q \oplus R)^t)^t = (R \vee T^t)^t$$

であり、ここで $\check{Q} = (R \vee T^t)^t$ とおくと、 $Q \subseteq \check{Q}$ だから

$$T = Q \oplus R \subseteq \check{Q} \oplus R$$

となる。一方、式(69)より

$$\check{Q} \oplus R = (R \vee T^t)^t \oplus R \subseteq T$$

となる。したがって

$$\check{Q} \oplus R = T$$

が示された。すなわち、 $\check{Q} = (R \vee T^t)^t$ は \mathcal{Q} の最大元である。

(Q. E. D.)

定理6によって、 \vee -ファジィシステムに関する逆問題の最大解および同定問題の最小解が存在することは示されたが、それらを得るための定理を以下に与える。

〔補題4〕 $Q \in \mathcal{L}(W \times X)$, $R \in \mathcal{L}(X \times Y)$, $T \in \mathcal{L}(W \times Y)$ に対し、

$$\textcircled{1} \quad Q^t \oplus (Q \vee R) \subseteq R \quad (72)$$

$$\textcircled{2} \quad (T \vee R^t)^t \oplus T \subseteq R \quad (73)$$

$$\textcircled{3} \quad Q \vee (Q^t \oplus T) \supseteq T \quad (74)$$

$$\textcircled{4} \quad T \vee (Q^t \oplus T)^t \supseteq Q \quad (75)$$

が成立する。

この補題の証明は、補題3の証明と同様に考えられるので省略する。

〔定理8〕

① $Q \in \mathcal{L}(W \times X)$, $T \in \mathcal{L}(W \times Y)$ に対し、

$$\mathcal{R} = \{ R \in \mathcal{L}(X \times Y) \mid Q \vee R = T \} \quad (76)$$

とするとき, $\mathcal{R} \ni \phi$ であるための必要十分条件は, $Q^t \oplus T$ が \mathcal{R} の最小元となることである。

② $R \in \mathcal{L}(X \times Y)$, $T \in \mathcal{L}(W \times Y)$ に対し,

$$\mathcal{Q} = \{Q \in \mathcal{L}(W \times X) \mid Q \oplus R = T\} \quad (77)$$

とするとき, $\mathcal{Q} \ni \phi$ であるための必要十分条件は, $T \oplus R^t$ が \mathcal{Q} の最大元となることである。

(証明) ①, ②ともに十分であることは自明だから, 必要であることを証明する。

①について: $\mathcal{R} \ni \phi$ とすると, $Q \oplus R = T$ となるような R が少なくとも 1 つは存在する。

このとき, 式 (72) より

$$R \supseteq Q^t \oplus (Q \oplus R) = Q^t \oplus T$$

であり, ここで, $\widehat{R} = Q^t \oplus T$ とおくと, 式 (31) より

$$T = Q \oplus R \supseteq Q \oplus \widehat{R}$$

となる。一方, 式 (74) より

$$Q \oplus \widehat{R} = Q \oplus (Q^t \oplus T) \supseteq T$$

となる。したがって

$$Q \oplus \widehat{R} = T$$

が示された。すなわち, $\widehat{R} = Q^t \oplus T$ は \mathcal{R} の最小元である。

②について: $\mathcal{Q} \ni \phi$ とすると, $Q \oplus R = T$ となるような Q が少なくとも 1 つは存在する。

このとき, 式 (72) より

$$R \supseteq Q^t \oplus (Q \oplus R) = Q^t \oplus T$$

であるので

$$(Q^t \oplus T)^t \subseteq R^t$$

となる。このとき, 式 (75) と式 (31) より

$$Q \subseteq T \oplus (Q^t \oplus T)^t \subseteq T \oplus R^t$$

であり, ここで, $\check{Q} = T \oplus R^t$ とおくと, 式 (30) より

$$T = Q \oplus R \supseteq \check{Q} \oplus R$$

となる。一方, 式 (73) より

$$R \supseteq (T \mathbb{V} R^t)^t \mathbb{Q} T = \check{Q}^t \mathbb{Q} T$$

であり, このとき, 式(31)と式(74)より

$$\check{Q} \mathbb{V} R \supseteq \check{Q} \mathbb{V} (\check{Q}^t \mathbb{Q} T) \supseteq T$$

となる。したがって

$$\check{Q} \mathbb{V} R = T$$

が示された。すなわち, $\check{Q} = T \mathbb{V} R^t$ は \mathcal{Q} の最大元である。

(Q. E. D.)

以上のことから, \mathbb{Q} -合成と \mathbb{V} -合成との相互依存性を次のようにまとめることができる。すなわち, \mathbb{Q} -ファジィシステムに関する逆問題および同定問題には, \mathbb{V} -合成によってそれぞれの最大解が与えられる。また, \mathbb{V} -ファジィシステムに関する逆問題には \mathbb{V} -合成によって最大解が与えられ, 同定問題には \mathbb{Q} -合成によって最小解が与えられる。

次に, \mathbb{Q} -ファジィシステムと \mathbb{V} -ファジィシステムとに関する逆問題および同定問題を考察するのに重要な定理を示そう。これらの証明は, 式(4), Min-Max不等式および式(32)~(39)に基づいて, \mathbb{Q} -ファジィシステムと \mathbb{V} -ファジィシステムの場合とは双対的に構成されるので省略する。

〔補題5〕 $A, A_1, A_2 \in \mathcal{L}^{(d)}(X)$ および $R, R_1, R_2 \in \mathcal{L}^{(d)}(X \times Y)$ に対し,

$$\textcircled{1} \quad (A_1 \cap A_2) \mathbb{Q} R = (A_1 \mathbb{Q} R) \cap (A_2 \mathbb{Q} R) \quad (78)$$

$$\textcircled{2} \quad (A_1 \cup A_2) \mathbb{Q} R \supseteq (A_1 \mathbb{Q} R) \cup (A_2 \mathbb{Q} R) \quad (79)$$

$$\textcircled{3} \quad A \mathbb{Q} (R_1 \cap R_2) = (A \mathbb{Q} R_1) \cap (A \mathbb{Q} R_2) \quad (80)$$

$$\textcircled{4} \quad A \mathbb{Q} (R_1 \cup R_2) \supseteq (A \mathbb{Q} R_1) \cup (A \mathbb{Q} R_2) \quad (81)$$

が成立する。

〔定理9〕 \mathbb{Q} -ファジィシステムに関する逆問題に対しては, 解集合が空でないとすれば, 最小解は存在するが, 最大解は存在するとは限らない。また, 同定問題に対しても解集合が空でないとすれば, 最小解は存在するが, 最大解は存在するとは限らない。

〔補題6〕 $A, A_1, A_2 \in \mathcal{L}^{(d)}(X)$ および $R, R_1, R_2 \in \mathcal{L}^{(d)}(X \times Y)$ に対し,

$$\textcircled{1} \quad (A_1 \cap A_2) \mathbb{V} R = (A_1 \mathbb{V} R) \cup (A_2 \mathbb{V} R) \quad (82)$$

$$\textcircled{2} \quad (A_1 \cup A_2) \mathbb{V} R \subseteq (A_1 \mathbb{V} R) \cap (A_2 \mathbb{V} R) \quad (83)$$

$$\textcircled{3} \quad A \mathbb{V} (R_1 \cap R_2) \subseteq (A \mathbb{V} R_1) \cap (A \mathbb{V} R_2) \quad (84)$$

$$\textcircled{4} \quad A \mathbb{V} (R_1 \cup R_2) = (A \mathbb{V} R_1) \cup (A \mathbb{V} R_2) \quad (85)$$

が成立する。

〔定理 10〕 ∇ -ファジィシステムに関する逆問題に対しては、解集合が空でないとすれば、最小解は存在するが、最大解は存在するとは限らない。また、同定問題に対しては、解集合が空でないとすれば、最大解は存在するが、最小解は存在するとは限らない。

〔補題 7〕 $Q \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times X)$, $R \in \mathcal{L}^{(d)}(X \times Y)$, $T \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times Y)$ に対し、

$$\textcircled{1} \quad Q^t \nabla (Q \boxplus R) \subseteq R \quad (86)$$

$$\textcircled{2} \quad (R \nabla (Q \boxplus R)^t)^t \subseteq Q \quad (87)$$

$$\textcircled{3} \quad Q \boxplus (Q^t \nabla T) \supseteq T \quad (88)$$

$$\textcircled{4} \quad (R \nabla T^t)^t \boxplus R \supseteq T \quad (89)$$

が成立する。

〔定理 11〕

① $Q \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times X)$, $T \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times Y)$ に対し、

$$\mathcal{R} = \{ R \in \mathcal{L}^{(d)}(X \times Y) \mid Q \boxplus R = T \} \quad (90)$$

とすると、 $\mathcal{R} \ni \phi$ であるための必要十分条件は、 $Q^t \nabla T$ が \mathcal{R} の最小元となることである。

② $R \in \mathcal{L}^{(d)}(X \times Y)$, $T \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times Y)$ に対し、

$$\mathcal{Q} = \{ Q \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times X) \mid Q \boxplus R = T \} \quad (91)$$

とすると、 $\mathcal{Q} \ni \phi$ であるための必要十分条件は、 $(R \nabla T^t)^t$ が \mathcal{Q} の最小元となることである。

〔補題 8〕 $Q \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times X)$, $R \in \mathcal{L}^{(d)}(X \times Y)$, $T \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times Y)$ に対し、

$$\textcircled{1} \quad Q^t \boxplus (Q \nabla R) \supseteq R \quad (92)$$

$$\textcircled{2} \quad (T \nabla R^t)^t \boxplus T \supseteq R \quad (93)$$

$$\textcircled{3} \quad Q \nabla (Q^t \boxplus T) \subseteq T \quad (94)$$

$$\textcircled{4} \quad T \nabla (Q^t \boxplus T)^t \subseteq Q \quad (95)$$

が成立する。

〔定理 12〕

① $Q \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times X)$, $T \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times Y)$ に対し、

$$\mathcal{R} = \{ R \in \mathcal{L}^{(d)}(X \times Y) \mid Q \nabla R = T \} \quad (96)$$

とすると、 $\mathcal{R} \ni \phi$ であるための必要十分条件は、 $Q^t \boxplus T$ が \mathcal{R} の最大元となることである。

② $R \in \mathcal{L}^{(d)}(X \times Y)$, $T \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times Y)$ に対し、

$$\mathcal{Q} = \{Q \in \mathcal{L}^{(d)}(W \times X) \mid Q \boxdot R = T\} \quad (97)$$

とするとき, $\mathcal{Q} \ni \emptyset$ であるための必要十分条件は, $T \boxdot R^t$ が \mathcal{Q} の最小元となることである。

以上のことから, \boxdot -合成と \boxdot -合成との相互依存性を次のようにまとめることができる。すなわち, \boxdot -ファジィシステムに関する逆問題および同定問題には, \boxdot -合成によってそれぞれの最小解が与えられる。また, \boxdot -ファジィシステムに関する逆問題には \boxdot -合成によって最小解が与えられ, 同定問題には \boxdot -合成によって最大解が与えられる。

最後に, 本論文で議論してきた4種類のファジィシステムが現実問題でよく取り扱われる典型的な入出力関係を与えていることを示しておこう。すなわち, システム表現 R を固定するとき, ファジィ入力 $A_1 \cup A_2$ に対しては

$$\left. \begin{aligned} (A_1 \cup A_2) \boxdot R &= (A_1 \boxdot R) \cup (A_2 \boxdot R) \\ (A_1 \cup A_2) \boxdot R &= (A_1 \boxdot R) \cap (A_2 \boxdot R) \\ (A_1 \cup A_2) \boxdot R &\supseteq (A_1 \boxdot R) \cup (A_2 \boxdot R) \\ (A_1 \cup A_2) \boxdot R &\subseteq (A_1 \boxdot R) \cap (A_2 \boxdot R) \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

が成立し, ファジィ入力 $A_1 \cap A_2$ に対しては

$$\left. \begin{aligned} (A_1 \cap A_2) \boxdot R &\subseteq (A_1 \boxdot R) \cap (A_2 \boxdot R) \\ (A_1 \cap A_2) \boxdot R &\supseteq (A_1 \boxdot R) \cup (A_2 \boxdot R) \\ (A_1 \cap A_2) \boxdot R &= (A_1 \boxdot R) \cap (A_2 \boxdot R) \\ (A_1 \cap A_2) \boxdot R &= (A_1 \boxdot R) \cup (A_2 \boxdot R) \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

が成立していることに注意しておく。

5. む す び

ファジィシステムの逆問題および同定問題を束論的な随伴性と双対性という観点から取り扱い, 4種類のファジィシステムに関する統一的理論を構築することができた。また, これらのファジィシステムを数理論理的に取り扱うことも可能であるが, それについては別の機会にゆずる。なお, 今後の課題としては, \boxdot -ファジィシステムと \boxdot -ファジィシステムの現実問題への応用⁶⁾だけでなく, 本論文で定式化した \boxdot -ファジィシステムと \boxdot -ファジィシステムとを加味した応用が考えられる。

参 考 文 献

- 1) Czogala, E. and Pedrycz, W. "On Identification in Fuzzy Systems and Its Application in Control Problems", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 6, pp. 73-83 (1981)
- 2) Goguen, J. A. : "L-Fuzzy Sets", Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 18, pp. 145-174 (1967)
- 3) Goguen, J. A. : "The Logic of Inexact Concepts", Synthese, Vol. 19, pp. 325-373 (1969)
- 4) Hirota, K. and Pedrycz, W. : "Analysis and Synthesis of Fuzzy Systems by the Use of Probabilistic Sets", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 10, pp. 1-13 (1983)
- 5) 和泉孔二 : "随伴的なファジィシステムとその応用に関する研究", 大阪府立大学博士論文 (1984)
- 6) 和泉, 田中, 浅居 : "ファジィ論理システムによる多変量解析モデルとその企業評価への応用", 日本経営工学会誌, Vol. 36, No. 1, pp. 54-59 (1985)
- 7) Pappis, C. P. and Sugeno, M. : "Fuzzy Relational Equations and the Inverse Problem", Internal Report, Queen Mary College, University of London (1976)
- 8) Sanchez, E. : "Resolution of Composite Fuzzy Relation Equations", Information and Control, Vol. 30, pp. 38-48 (1976)
- 9) Schweizer, B. and Sklar, A. : "Associative Functions and Abstract Semigroups", Publicationes Mathematicae Debrecen, Vol. 10, pp. 69-81 (1963)
- 10) 塚本, 田代 : "Fuzzy 逆問題の解法", 計測自動制御学会論文集, Vol. 15, No. 1, pp. 21-25 (1979)
- 11) Zadeh, L. A. : "Fuzzy Sets", Information and Control, Vol. 8, pp. 338-353 (1965)

(1988年3月19日受理)