古典述語論理計算LKの拡張とその応用

和　泉　孔　二

Extension of Classical Predicate Logic Calculus LK and Its Application

Koji　IZUMI

1. ま　え　が　き

最近の情報科学の分野において広く知られているLISPとPROLOGは，それぞれ帰納的関数と述語論理[1]といった数学基礎論の概念と対応していることは周知の事実である。また，様相論理[2]から派生した時制論理がプログラム理論の基礎づけに有効であることもよく知られている。このように，数学基礎論と情報科学との関連性は今後ますます深くなっていくものと考えられる。

本論文では，まず集合の四則演算を随伴性および双対性という概念のもとで定式化している。この際，商集合演算を提案することにより，調和のとれた集合演算どうしの関係を構築している。次に，これらの四則演算を古典述語論理計算ＬＫの論理記号に対応させることを試み，商集合演算は含意→に相当しているので，商集合演算に双対な差集合演算に相当する論理記号である双対含意←とそれから導ける双対否定⟍とをＬＫに付加することを提案している。

また，本論文では，以上のように拡張した古典述語論理計算ＬＫにおける式の定義を制限することによって，直観主義述語論理計算ＬＪおよび双対直観主義述語論理計算ＤＬＪを定式化できることを示し，これら３つの体系ＬＫ，ＬＪ，ＤＬＪの諸性質を導いている。なお，それぞれの体系において否定⟋と双対否定⟍とが同等な概念であることをも示している。

2. 随伴性および双対性に基づく集合の四則演算の構成

まず，圏論[3]で取り扱われる随伴性の概念を述べよう。

〔定義 2.1〕　２つの圏$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$に対し，２つの関手F，Gが

$$\mathscr{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{B} \tag{1}$$

無断転載禁止

であり，かつ任意の$\mathcal{A}$の対象 Aと$\mathcal{B}$の対象 Bとに対して

$$\mathcal{A}(F(B),A) \simeq \mathcal{B}(B,G(A)) \tag{2}$$

となるときに，FはGの左随伴関手である，またはGはFの右随伴関手であると呼び，記号で

$$F \longrightarrow\!\!\!\!| \; G \tag{3}$$

と表す。

この定義を集合の圏Setsに限定し，射を集合間の包含関係に対応させて考えると，集合論的な随伴性は次のように定義される。

〔定義 2.2〕 2つの集合A，Bに対し

$$F(B) \subseteq A \Longleftrightarrow B \subseteq G(A) \tag{4}$$

を満たす2つの集合関数F，Gが存在するとき，FをGの左随伴である，またはGはFの右随伴であると呼ぶ。

同様に，束論的な随伴性は次のように定義できる。

〔定義 2.3〕 2つの束L_1，L_2に対し

$$L_1 \underset{g}{\overset{f}{\leftrightarrows}} L_2 \tag{5}$$

なる2つの関数f，gが

$$f(q) \leq p \Longleftrightarrow q \leq g(p) \qquad (\forall p \in L_1,\ \forall q \in L_2) \tag{6}$$

という条件を満たすとき，fはgの左随伴である，またはgはfの右随伴であると呼ぶ。

さて，圏論で取り扱われる双対性の概念とは次のようなものである。

〔定義 2.4〕 圏$\mathcal{C}$に対し，その双対圏$\mathcal{C}^{op}$とはその対象全体の集合が$\mathcal{C}$の対象全体の集合と同じであり，$\mathcal{C}^{op}$の射全体の集合も$\mathcal{C}$の射全体の集合と同じである。ただし，$\mathcal{C}^{op}$における任意の射$f: A \longrightarrow B$の存在は，$\mathcal{C}$において射$f: B \longrightarrow A$が存在することによって規定される。図で示せば

$$\begin{array}{ccc} B & & B \\ f\Big\downarrow & \Longleftrightarrow & f\Big\uparrow \\ A\ (_{in}\,\mathcal{C}) & & A\ (_{in}\,\mathcal{C}^{op}) \end{array}$$

となる。

〔注 意〕 この双対性の概念を順序集合で考えれば，次のような双対の原理となる。すなわち，順序集合$(S, \leq)$で成立する命題Pに対し，Pに含まれる$\leq$をすべて$\geq$で置き換えて得られるPの双対命題P^{op}を考えるとき，Pが定理であればP^{op}もまた定理となる。

次に，集合の四則演算である和集合，差集合，積集合，商集合について述べよう。本論文で取り扱う和集合，差集合，積集合については周知の通りのものであるが，商集合の概念は新しく提案するものである。

無断転載禁止

〔**定義 2.5**〕　2つの集合A，Bに対し，それらの和集合$A\cup B$は合併集合，積集合$A\cap B$は共通集合とし，差集合$A-B$と商集合A/Bはそれぞれ次のように定義される。

$$A-B=A\cap B^c \tag{7}$$

$$A/B=(B\cap A^c)^c \tag{8}$$

ただし，A^cはAの補集合を表している。

〔**注意**〕　元来，商集合という用語は次のような意味で使われている。すなわち，集合Sにおける1つの同値関係Rに対し，Rの同値類の集合をSのRに関する商集合と呼び，S/Rと表している。

定義 2.5より，商集合A/Bは

$$A/B=A\cup B^c \tag{9}$$

とも表され，また，商集合と差集合との間には

$$A/B=(B-A)^c \tag{10}$$

という関係があることがわかる。

さて，完備Heyting代数を一般化した完備束半群，および双対完備束半群の理論[4)]によれば，差集合と商集合は以下のように定義できる。

〔**定義 2.6**〕　2つの集合A，Bに対し

$$A-B=\cap\{X \mid B\cup X\supseteq A\} \tag{11}$$

$$A/B=\cup\{X \mid B\cap X\subseteq A\} \tag{12}$$

と定義する。

この定義 2.6は，集合の四則演算の随伴性および双対性を明確に示している。なぜなら，式(12)により

$$A\cap X\subseteq B \Longleftrightarrow X\subseteq B/A \tag{13}$$

すなわち

$$A\cap\cdot \longrightarrow\!\!\!\!\!\dashv \cdot/A \tag{14}$$

となり，また，式(11)により

$$A\cup X\supseteq B \Longleftrightarrow X\supseteq B-A \tag{15}$$

すなわち

$$A\cup\cdot \vdash\!\!\!\!\!\longrightarrow \cdot-A \tag{16}$$

となる。ここで，式(13)と式(15)は互いに双対な関係にもなっている。したがって，この状況は

$$\begin{tikzcd}
A\cap\cdot \arrow[r, -|, "\text{随伴的}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{双対的}"'] & \cdot/A \arrow[d, leftrightarrow, "\text{双対的}"] \\
A\cup\cdot \arrow[r, |-, "\text{随伴的}"'] & \cdot-A
\end{tikzcd}$$

無断転載禁止

と示される。換言すれば，和集合演算は差集合演算の右随伴であり，積集合演算は商集合演算の左随伴である。また，和集合演算と積集合演算，および差集合演算と商集合演算はそれぞれ双対な関係になっている。

3. 集合の四則演算に対応させた古典述語論理計算ＬＫの拡張

公理的集合論[5]を展開するときに，その基礎となるのはGentzenによる古典述語論理計算ＬＫ[6]である。ＬＫとは，次に述べる推論規則の与えられた論理体系のことである。

① 式の構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{D,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}(w \Longrightarrow) \qquad \frac{\Delta \Longrightarrow \Gamma}{\Delta \Longrightarrow \Gamma,\ D}(\Longrightarrow w)$$

$$\frac{\Gamma,\ C,\ D,\ \Pi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma,\ D,\ C,\ \Pi \Longrightarrow \Delta}(e \Longrightarrow) \qquad \frac{\Delta \Longrightarrow \Pi,\ D,\ C,\ \Gamma}{\Delta \Longrightarrow \Pi,\ C,\ D,\ \Gamma}(\Longrightarrow e)$$

$$\frac{\Gamma,\ C,\ C,\ \Pi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma,\ C,\ \Pi \Longrightarrow \Delta}(c \Longrightarrow) \qquad \frac{\Delta \Longrightarrow \Pi,\ C,\ C,\ \Gamma}{\Delta \Longrightarrow \Pi,\ C,\ \Gamma}(\Longrightarrow c)$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ D \qquad D,\ \Sigma \Longrightarrow \Pi}{\Gamma,\ \Sigma \Longrightarrow \Delta,\ \Pi}(\mathrm{cut})$$

ここで，wはweakening（弱化），eはexchange（交換），cはcontraction（縮約）を表す。

② 論理記号に関する推論規則

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{A,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \wedge B,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta} \\[2ex] \dfrac{B,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \wedge B,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}\end{array}\right\}(\wedge \Longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A \qquad \Gamma \Longrightarrow \Delta,\ B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A \wedge B}(\Longrightarrow \wedge)$$

$$\frac{A,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta \qquad B,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \vee B,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}(\vee \Longrightarrow) \qquad \left.\begin{array}{c}\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A \vee B} \\[2ex] \dfrac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A \vee B}\end{array}\right\}(\Longrightarrow \vee)$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A \qquad B,\ \Sigma \Longrightarrow \Pi}{A \rightarrow B,\ \Gamma,\ \Sigma \Longrightarrow \Delta,\ \Pi}(\rightarrow \Longrightarrow) \qquad \frac{A,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta,\ B}{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A \rightarrow B}(\Longrightarrow \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A}{\neg A,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}(\neg \Longrightarrow) \qquad \frac{A,\ \Delta \Longrightarrow \Gamma}{\Delta \Longrightarrow \Gamma,\ \neg A}(\Longrightarrow \neg)$$

無断転載禁止

$$\frac{A(t),\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\forall x A(x),\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}(\forall \Longrightarrow)$$

t は任意の項

$$\frac{\Delta \Longrightarrow \Gamma,\ A(a)}{\Delta \Longrightarrow \Gamma,\ \forall x A(x)}(\Longrightarrow \forall)$$

a は下式には現れない。

a をこの推論規則の固有変数という。

$$\frac{A(a),\ \Gamma \Longrightarrow \Gamma}{\exists x A(x),\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}(\exists \Longrightarrow)$$

a は下式には現れない。

a をこの推論規則の固有変数という。

$$\frac{\Delta \Longrightarrow \Gamma,\ A(t)}{\Delta \Longrightarrow \Gamma,\ \exists x A(x)}(\Longrightarrow \exists)$$

t は任意の項

〔**注意**〕　推論規則の中の A，B，C，D は論理式であり，ギリシャ文字 Γ，Δ，Π，Σ は論理式の有限列（空列も含めて）である。

さて，本論文での LK の拡張を考えるとき，LKで証明可能な次の式は重要である。

$$\Longrightarrow (A \to B) \equiv \neg (A \wedge \neg B) \tag{17}$$

ただし，$\equiv$ は同値を意味する補助的な論理記号であり，論理式 F_1，F_2 に対し，$F_1 \equiv F_2$ は論理式 $(F_1 \to F_2) \wedge (F_2 \to F_1)$ を略記したものである。このとき，2章で定式化した集合の四則演算の中の商集合演算と式(17)とが同じ形をしていることに着目すると，LKの代数的モデルとなる完備Boole代数において

$$A / B = B \to A \tag{18}$$

が成立していると考えられる。また，定義2.5から明らかなように，商集合演算よりも差集合演算のほうがより原始的であるといえる。したがって，本論文では，差集合演算に対応する双対含意演算 $\leftarrow$ を次のように定義する。すなわち，完備Boole代数において

$$A - B = A \leftarrow B \tag{19}$$

と定められる双対含意演算 $\leftarrow$ を LK に付加することを提案する。このとき，論理記号 $\leftarrow$ に関して，次の2つの推論規則が成立する。

$$\frac{B,\ \Delta \Longrightarrow \Gamma,\ A}{B \leftarrow A,\ \Delta \Longrightarrow \Gamma}(\leftarrow \Longrightarrow)$$

$$\frac{\Pi \Longrightarrow \Sigma,\ B \qquad A,\ \Delta \Longrightarrow \Gamma}{\Pi,\ \Delta \Longrightarrow \Sigma,\ \Gamma,\ B \leftarrow A}(\Longrightarrow \leftarrow)$$

なぜなら，$(\leftarrow \Longrightarrow)$ については，Γ および Δ が空でない場合，Γ のすべての論理式を $\vee$ で結合した論理式を C と考え，Δ のすべての論理式を $\wedge$ で結合した論理式を D と考えれば

$$\begin{array}{c} B,\ D \Longrightarrow C,\ A \\ \hline\hline B \wedge D \Longrightarrow C \vee A \\ \hline\hline B \leftarrow A,\ D \Longrightarrow C \end{array}$$

より導かれる。このことは，完備Boole代数において

$$b \wedge d \leq c \vee a \tag{20}$$

無断転載禁止

から

$$a^c \wedge b \wedge d \leq c \tag{21}$$

が導かれることに対応している。ただし，a^c は a の補元を表す。なお，Γ または $\varDelta$ が空のときは，恒真命題⊤，恒偽命題⊥に対し，$\bot \vee A = A$ および $B \wedge \top = B$ であることを用いれば明らかに推論規則 $(\leftarrow \Longrightarrow)$ は成立することがわかる。

次に，$(\Longrightarrow \leftarrow)$ については，以下のように導ける。

$$\dfrac{\dfrac{\Pi,\ \varDelta \Longrightarrow \Sigma,\ B \leftarrow A,\ \Gamma}{\Pi,\ \varDelta \Longrightarrow \Sigma,\ \Gamma,\ B \leftarrow A}}{} \quad \text{where} \quad \dfrac{\Pi \Longrightarrow \Sigma,\ B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \leftarrow A \Longrightarrow B \leftarrow A}{B \Longrightarrow (B \leftarrow A) \vee A}}{B \Longrightarrow B \leftarrow A,\ A} \qquad A,\ \varDelta \Longrightarrow \Gamma}{B,\ \varDelta \Longrightarrow B \leftarrow A,\ \Gamma}}{}}{\Pi,\ \varDelta \Longrightarrow \Sigma,\ B \leftarrow A,\ \Gamma}$$

さて，完備Boole代数の最小元０，最大元１にそれぞれ恒偽命題⊥，恒真命題⊤が対応していたことにより，完備Boole代数における A^c とＬＫにおける A の否定 $\neg A$ とが対応し，ＬＫにおいて

$$\Longrightarrow \neg A \equiv A \rightarrow \bot \tag{22}$$

が証明可能となる。

本論文では，式(19)で定義された双対含意演算←に基づいて双対否定演算 $\nwarrow$ を

$$\Longrightarrow \nwarrow A \equiv \top \leftarrow A \tag{23}$$

がＬＫで証明可能となるようなものであると定義し，論理記号 $\nwarrow$ を論理記号←とともにＬＫに付加することを提案する。この論理記号 $\nwarrow$ に関しては，次の２つの推論規則が成立する。

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow \varDelta,\ A}{\nwarrow A,\ \Gamma \Longrightarrow \varDelta}\ (\nwarrow \Longrightarrow)$$

$$\dfrac{A,\ \varDelta \Longrightarrow \Gamma}{\varDelta \Longrightarrow \Gamma,\ \nwarrow A}\ (\Longrightarrow \nwarrow)$$

なぜなら，$(\nwarrow \Longrightarrow)$ については

$$\begin{array}{c} \Gamma \Longrightarrow \varDelta,\ A \\ \dfrac{\top,\ \Gamma \Longrightarrow \varDelta,\ A}{\top \leftarrow A,\ \Gamma \Longrightarrow \varDelta}\ (\leftarrow \Longrightarrow) \end{array}$$

より導かれ，また，$(\Longrightarrow \nwarrow)$ については

$$\dfrac{\Longrightarrow \top \qquad A,\ \varDelta \Longrightarrow \Gamma}{\varDelta \Longrightarrow \Gamma,\ \top \leftarrow A}\ (\Longrightarrow \leftarrow)$$

より導かれる。

ＬＫにおいては，否定 $\neg$ と双対否定 $\nwarrow$ は同等な概念である。すなわち，

無断転載禁止

$$\Longrightarrow \neg A \equiv \ulcorner A \tag{24}$$

がＬＫで証明可能であることが以下のように示される。

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \Longrightarrow A$}
\RightLabel{$(\neg \Longrightarrow)$}
\UnaryInfC{$\neg A,\ A \Longrightarrow$}
\RightLabel{$(e \Longrightarrow)$}
\UnaryInfC{$A,\ \neg A \Longrightarrow$}
\RightLabel{$(\Longrightarrow \ulcorner)$}
\UnaryInfC{$\neg A \Longrightarrow \ulcorner A$}
\RightLabel{$(\Longrightarrow \rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\Longrightarrow \neg A \rightarrow \ulcorner A$}
\AxiomC{$A \Longrightarrow A$}
\RightLabel{$(\Longrightarrow \neg)$}
\UnaryInfC{$\Longrightarrow A,\ \neg A$}
\RightLabel{$(\Longrightarrow e)$}
\UnaryInfC{$\Longrightarrow \neg A,\ A$}
\RightLabel{$(\ulcorner \Longrightarrow)$}
\UnaryInfC{$\ulcorner A \Longrightarrow \neg A$}
\RightLabel{$(\Longrightarrow \rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\Longrightarrow \ulcorner A \rightarrow \neg A$}
\RightLabel{$(\Longrightarrow \wedge)$}
\BinaryInfC{$\Longrightarrow (\neg A \rightarrow \ulcorner A) \wedge (\ulcorner A \rightarrow \neg A)$}
\end{prooftree}
$$

〔**注意**〕　完備Boole代数において，$\neg a$と$\ulcorner a$はそれぞれ

$$\neg a = a \rightarrow 0 = a^c \vee 0 = a^c \tag{25}$$

$$\ulcorner a = 1 \leftarrow a = 1 \wedge a^c = a^c \tag{26}$$

と変形されるので，明らかに同等であることがわかる。しかし，後述する直観主義述語論理計算ＬＪの代数的モデルとなる完備Heyting代数であり，かつ双対直観主義述語論理計算ＤＬＪの代数的モデルとなる双対完備Heyting代数でもある$L=[0,1]$の場合は，ＬＪでの否定に相当する$\neg a$とDLＪでの否定に相当する$\ulcorner a$は同等でない。なぜなら

$$a \rightarrow b = \bigvee \{x \mid a \wedge x \leq b\} = \begin{cases} 1 & (a \leq b) \\ b & (a > b) \end{cases} \tag{27}$$

$$b \leftarrow a = \bigwedge \{x \mid a \vee x \geq b\} = \begin{cases} 0 & (a \geq b) \\ b & (a < b) \end{cases} \tag{28}$$

と表されることより

$$\neg a = a \rightarrow 0 = \begin{cases} 1 & (a = 0) \\ 0 & (0 < a \leq 1) \end{cases} \tag{29}$$

$$\ulcorner a = 1 \leftarrow a = \begin{cases} 1 & (0 \leq a < 1) \\ 0 & (a = 1) \end{cases} \tag{30}$$

となっているからである。

4.　直観主義述語論理計算ＬＪと双対直観主義述語論理計算ＤＬＪ

本論文では，古典述語論理計算ＬＫに２つの論理記号←，$\ulcorner$とそれらに関する推論規則とを付加した体系を考えてきたが，以下，ＬＫでの式の定義を制限することによって得られる直観主義述語論理計算ＬＪと双対直観主義述語論理計算ＤＬＪとについて述べよう。

いま，ＬＫにおける式$\Gamma \Longrightarrow \Delta$を次のように制限することによって，ＬＪおよびDLＪを定式化する。

〔**定義 4.1**〕　ＬＪにおける式$\Gamma \Longrightarrow \Delta$とは，右辺の$\Delta$が高々１つの論理式から成るものと

無断転載禁止

する。また，ＤＬＪにおける式$\Gamma \Longrightarrow \Delta$とは，左辺の$\Gamma$が高々１つの論理式から成るものとする。

このように定義することによって，論理記号←および$\nwarrow$が付加されたＬＫの推論規則は，ＬＪでは以下のようになる。

〔**ＬＪにおける推論規則**〕

① 式の構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta}{D,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}(w \Longrightarrow) \qquad \frac{\Delta \Longrightarrow}{\Delta \Longrightarrow D}(\Longrightarrow w)$$

$$\frac{\Gamma,\ C,\ D,\ \Pi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma,\ C,\ D,\ \Pi \Longrightarrow \Delta}(e \Longrightarrow)$$

$$\frac{\Gamma,\ C,\ C,\ \Pi \Longrightarrow \Delta}{\Gamma,\ C,\ \Pi \Longrightarrow \Delta}(c \Longrightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow D \qquad D,\ \Sigma \Longrightarrow \Pi}{\Gamma,\ \Sigma \Longrightarrow \Pi}(\mathrm{cut})$$

ここで，ＬＪにおける式の定義から，ＬＪには$(\Longrightarrow e)$や$(\Longrightarrow c)$はないことに注意しておく。

② 論理記号に関する推論規則

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{A,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \wedge B,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta} \\[2ex] \dfrac{B,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \wedge B,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}\end{array}\right\}(\wedge \Longrightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Longrightarrow A \qquad \Gamma \Longrightarrow B}{\Gamma \Longrightarrow A \wedge B}(\Longrightarrow \wedge)$$

$$\frac{A,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta \qquad B,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}{A \vee B,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}(\vee \Longrightarrow) \qquad \left.\begin{array}{c}\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A}{\Gamma \Longrightarrow A \vee B} \\[2ex] \dfrac{\Gamma \Longrightarrow B}{\Gamma \Longrightarrow A \vee B}\end{array}\right\}(\Longrightarrow \vee)$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow A \qquad B,\ \Sigma \Longrightarrow \Pi}{A \rightarrow B,\ \Gamma,\ \Sigma \Longrightarrow \Pi}(\rightarrow \Longrightarrow) \qquad \frac{A,\ \Gamma \Longrightarrow B}{\Gamma \Longrightarrow A \rightarrow B}(\Longrightarrow \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow A}{\neg A,\ \Gamma \Longrightarrow}(\neg \Longrightarrow) \qquad \frac{A,\ \Delta \Longrightarrow}{\Delta \Longrightarrow \neg A}(\Longrightarrow \neg)$$

$$\frac{B,\ \Delta \Longrightarrow A}{B \leftarrow A,\ \Delta \Longrightarrow}(\leftarrow \Longrightarrow) \qquad \frac{\Pi \Longrightarrow B \qquad A,\ \Delta \Longrightarrow}{\Pi,\ \Delta \Longrightarrow B \leftarrow A}(\Longrightarrow \leftarrow)$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow A}{\nwarrow A,\ \Gamma \Longrightarrow}(\nwarrow \Longrightarrow) \qquad \frac{A,\ \Delta \Longrightarrow}{\Delta \Longrightarrow \nwarrow A}(\Longrightarrow \nwarrow)$$

無断転載禁止

$$\frac{A(t),\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\forall x A(x),\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}(\forall \Longrightarrow)$$

t は任意の項

$$\frac{\Delta \Longrightarrow A(a)}{\Delta \Longrightarrow \forall x A(x)}(\Longrightarrow \forall)$$

a は下式には現れない。

a をこの推論規則の固有変数という。

$$\frac{A(a),\ \Gamma \Longrightarrow}{\exists x A(x),\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}(\exists \Longrightarrow)$$

a は下式には現れない。

a をこの推論規則の固有変数という

$$\frac{\Delta \Longrightarrow A(t)}{\Delta \Longrightarrow \exists x A(x)}(\Longrightarrow \exists)$$

t は任意の項

さて，以上に示したＬＪの推論規則と同様に，ＤＬＪの推論規則も式の左辺が高々１つの論理式から成るという制限を付けることによって示すことができるが割愛する。また，ＬＫの場合と同様に，ＬＪおよびＤＬＪにおいても

$$\Longrightarrow \neg A \equiv \neg\!\!\!\!\nwarrow A \tag{31}$$

が証明可能となる。したがって，以下，ＬＫでの否定を～，ＬＪでの否定を $\neg$，ＤＬＪでの否定を $\nwarrow$ と書くことと約束する。このとき，これらに関する推論規則を列記すると

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow \Delta,\ A}{\sim A,\ \Gamma \Longrightarrow \Delta}(\sim \Longrightarrow) \qquad \frac{A,\ \Delta \Longrightarrow \Gamma}{\Delta \Longrightarrow \Gamma,\ \sim A}(\Longrightarrow \sim)$$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow A}{\neg A,\ \Gamma \Longrightarrow}(\neg \Longrightarrow) \qquad \frac{A,\ \Delta \Longrightarrow}{\Delta \Longrightarrow \neg A}(\Longrightarrow \neg)$$

$$\frac{\Longrightarrow \Delta,\ A}{\nwarrow A \Longrightarrow \Delta}(\nwarrow \Longrightarrow) \qquad \frac{A \Longrightarrow \Gamma}{\Longrightarrow \Gamma,\ \nwarrow A}(\Longrightarrow \nwarrow)$$

となる。また，ある論理体系 S で式 $\Gamma \Longrightarrow \Delta$ が証明可能であることを $S \vdash \Gamma \Longrightarrow \Delta$ と書き，証明可能でないことを $S \nvdash \Gamma \Longrightarrow \Delta$ と書くことにすると，次の定理が成り立つ。

〔**定理 4.1**〕

① ＬＫ $\vdash \Longrightarrow A \vee \sim A$

② ＬＫ $\vdash \Longrightarrow \sim(A \wedge \sim A)$

③ ＬＫ $\vdash \Longrightarrow \sim\sim A \equiv A$

④ ＬＪ $\nvdash \Longrightarrow A \vee \neg A$

⑤ ＬＪ $\vdash \Longrightarrow \neg(A \wedge \neg A)$

⑥ ＬＪ $\vdash \Longrightarrow A \rightarrow \neg\neg A$

⑦ ＬＪ $\nvdash \Longrightarrow \neg\neg A \rightarrow A$

⑧ ＤＬＪ $\vdash \Longrightarrow A \vee \nwarrow A$

⑨ ＤＬＪ $\nvdash \Longrightarrow \nwarrow(A \wedge \nwarrow A)$

⑩ ＤＬＪ $\nvdash \Longrightarrow A \rightarrow \nwarrow\nwarrow A$

無断転載禁止

⑪　　$\mathrm{DLJ} \vdash \Longrightarrow \ulcorner\ulcorner A \to A$

ここで，①，④，⑧は排中律の成立・不成立を示し，②，⑤，⑨は矛盾律の成立・不成立を示している。

（証明）　⑧と⑪についてだけ示す。他は同様に示される。

⑧について：

$$
\begin{array}{ll}
A \Longrightarrow A & \\ \hline
\Longrightarrow A,\ \ulcorner A & (\Longrightarrow \ulcorner) \\ \hline
\Longrightarrow A,\ A \vee \ulcorner A & (\Longrightarrow \vee) \\ \hline
\Longrightarrow A \vee \ulcorner A,\ A & (\Longrightarrow e) \\ \hline
\Longrightarrow A \vee \ulcorner A,\ A \vee \ulcorner A & (\Longrightarrow \vee) \\ \hline
\Longrightarrow A \vee \ulcorner A & (\Longrightarrow c)
\end{array}
$$

⑪について：

$$
\begin{array}{ll}
A \Longrightarrow A & \\ \hline
\Longrightarrow A,\ \ulcorner A & (\Longrightarrow \ulcorner) \\ \hline
\ulcorner\ulcorner A \Longrightarrow A & (\ulcorner \Longrightarrow) \\ \hline
\Longrightarrow \ulcorner\ulcorner A \to A & (\Longrightarrow \to)
\end{array}
$$

（Q．E．D）

〔 **定理 4.2** 〕

①　　$\mathrm{LJ} \vdash \Longrightarrow \urcorner \exists x A(x) \equiv \forall x \urcorner A(x)$

②　　$\mathrm{DLJ} \vdash \Longrightarrow \ulcorner \forall x A(x) \equiv \exists x \ulcorner A(x)$

（証明）　②についてだけ示す。

前半：

$$
\begin{array}{ll}
A(a) \Longrightarrow A(a) & \\ \hline
\Longrightarrow A(a),\ \ulcorner A(a) & (\Longrightarrow \ulcorner) \\ \hline
\Longrightarrow A(a),\ \exists x \ulcorner A(x) & (\Longrightarrow \exists) \\ \hline
\Longrightarrow \exists x \ulcorner A(x),\ A(a) & (\Longrightarrow e) \\ \hline
\Longrightarrow \exists x \ulcorner \forall(x),\ \forall x A(x) & (\Longrightarrow \forall) \\ \hline
\ulcorner \forall x A(x) \Longrightarrow \exists x \ulcorner A(x) & (\ulcorner \Longrightarrow) \\ \hline
\Longrightarrow \ulcorner \forall x A(x) \to \exists x \ulcorner A(x) & (\Longrightarrow \to)
\end{array}
$$

後半：

$$
\begin{array}{ll}
A(a) \Longrightarrow A(a) & \\ \hline
\forall x A(x) \Longrightarrow A(a) & (\forall \Longrightarrow) \\ \hline
\Longrightarrow A(a),\ \ulcorner \forall x A(x) & (\Longrightarrow \ulcorner) \\ \hline
\Longrightarrow \ulcorner \forall x A(x),\ A(a) & (\Longrightarrow e) \\ \hline
\ulcorner A(a) \Longrightarrow \ulcorner \forall x A(x) & (\ulcorner \Longrightarrow) \\ \hline
\exists x \ulcorner A(x) \Longrightarrow \ulcorner \forall x A(x) & (\exists \Longrightarrow) \\ \hline
\Longrightarrow \exists x \ulcorner A(x) \to \ulcorner \forall x A(x) & (\Longrightarrow \to)
\end{array}
$$

（Q．E．D.）

無断転載禁止

5. むすび

集合の四則演算を考察することからＬＫを拡張し，それに基づいてＬＪおよびＤＬＪを定式化して，それらの諸性質を明確にすることができた。

本論文で取り扱った集合の四則演算については，種々の観点から検討する余地があるものと考えられる。また，ＬＪおよびＤＬＪの推論規則をファジィシステムの逆問題と同定問題[7]に適用し，それらの解法を統一的に示すこともできるであろう。

参考文献

1）松本和夫：“情報数学１―束と論理”，森北出版（1980）.
2）松本和夫：“数理論理学”，共立出版（1970）.
3）MacLane, S.: “Categories for the Working Mathematician”, Springer (1971).
4）和泉孔二：“随伴的なファジィシステムとその応用に関する研究”，大阪府立大学博士論文（1984）.
5）Takeuti, G., Zaring, W.: “Axiomatic Set Theory”, Sprinter (1973).
6）Gentzen, G.: “Untersuchungen über das logische Schliessen Ⅰ.Ⅱ.”, Mathematisch Zeitschrift, Vol. 39, pp. 176―210, pp. 405―431 (1935).
7）和泉孔二：“ファジィシステムの逆問題と同定問題”，情報科学研究，第2号，pp. 31―49 (1988).

（1990年3月19日 受理）

無断転載禁止