

シミュレーションを通して3体問題の動力学を理解する

—基礎物理学向け Web-Based Learning 環境構築のための教材部品の開発・収集—

池 村 勉

Understanding the Dynamics of the Three-Body Problem via Various Simulations
—Development and Collection of Some Parts of a Web-Based Learning System for Fundamental Physics—

Tsutomu IKEMURA

アブストラクト

In order to assist learners of physics in grasping the dynamics of “the three-body problem,” various computer simulations (or animations) visualizing the dynamics have been developed and also collected from some relevant web-pages, under the different kinds of special physical conditions. The solutions for the three-body problem under consideration are described on the two-dimensional plane and almost restricted to the special solutions which represent some regular motions of three mass particles (bodies) interacting with each other solely through the universal gravitation. Most of the simulated motions are those observed by an observer standing on the center-of-mass frame of reference whose origin is fixed to the center-of-mass of “the system of three particles.” And for comparison, some of the same motions have been simulated also in the relative frame of reference whose origin is fixed to one of the three particles.

キーワード：シミュレーション, 3体問題, 力学, 物理学, Web-Based Learning

1. はじめに

本研究テーマへの取り組みは、筆者が他で紹介した、ある研究会におけるエピソード^{1,2)}から得られた着想に端を発する。そこで筆者は、その研究会で交わされた示唆に富む問答³⁾に体系的な説明を与える教材を手作りすることに価値があるのではないかと考えた。具体的には、「質点系」の力学⁴⁾とその「重心」または「重心系」の概念を科学的かつ直感的に理解させてくれるコンピュータ・シミュレーション（以下動画としての側面を強調するときは“アニメーション”と表すことがある！）を利用した教材のことである。

前回報告したように、そのような教材作りの手始めとして、最も簡単な2体問題²⁾あるいは2質点系の運動、特に「ケプラーの法則」に従う楕円運動²⁾、即ちいわゆる“ケプラー運動”のシミュレーションを手作りした。そこでは、このような2体問題の運動が観測視点の違いによって如何に違って見えるかを理解できるように、3種類の相異なる観測視点—「慣性座標系」, 「重心系」, および「相対座標系」—から観測した運動のシミュレーションを用意した。例えば、「重心系」で2体問題の運動を観測するとき、もし仮に我々の太陽系と相違して、惑星の質量が太陽のそれに比べて無視できないほど大きくなると、惑星のみならず太陽も同じ周期で共通の重心を焦点の1つとする楕円軌道を描く²⁾。ただし、この場合、太陽の楕円軌道はそれなりにまだ小さいが、仮に更に惑星の質量が大きくなり太陽のそれと同じになると、両方の楕円軌道の大きさも同じになる²⁾。もちろん、我々の太陽系におけるように、太陽の質量が十分大きければ、太陽は実質的に(または近似的に)不動である²⁾。即ち、「重心系」における惑星運動の観測結果は、「相対座標系」において観測される“ケプラー運動”とほぼ一致するのである²⁾。

表0 n体問題に関する基本的用語の定義・説明

用語	関連表現	定義または説明
質点		物体の形や大きさを見捨て、その全質量が「重心」点に集中したと考えたときの物体。
n質点系 (多粒子系)	n体問題 多体問題	相互に力が働くn個(n=2, 3, 4...)の質点の集まり。 働く力が重力のとき、重力多体問題という。もちろん、天体の運動についての「2体問題」や「3体問題」は、重力多体問題に属する。
質点系の重心	質量中心	第j番目の質点j (j = 1, 2, ..., n)の質量と座標が、それぞれ $m_j, (x_j, y_j, z_j)$ である。n質点系 (n=2, 3, 4, ...)の重心座標(の成分)は、
重心座標 (「重心」 の定義)	(「重心」 の座標 のこと)	$x_G = \frac{\sum_{j=1}^n m_j x_j}{\sum_{j=1}^n m_j}, \quad y_G = \frac{\sum_{j=1}^n m_j y_j}{\sum_{j=1}^n m_j}, \quad z_G = \frac{\sum_{j=1}^n m_j z_j}{\sum_{j=1}^n m_j}.$
重心系		質点系の「重心」に原点を置く座標系
重心系座標		質点jの重心系座標(の成分)は、 $x_{Gj} = x_j - x_G, \quad y_{Gj} = y_j - y_G, \quad z_{Gj} = z_j - z_G.$
相対座標系		特定の質点kに原点を置く座標系
相対座標		座標 (x_k, y_k, z_k) にある質点kに対する、座標 (x_j, y_j, z_j) にある質点jの相対座標(の成分)は、 $x_{kj} = x_j - x_k, \quad y_{kj} = y_j - y_k, \quad z_{kj} = z_j - z_k.$
慣性系	慣性 座標系	外力を受けていない物体が等速直線運動をする座標系、即ち「慣性の法則」が成立する座標系。 厳密には、絶対静止座標系に対して等速直線運動をする座標系のこと。慣性系は無数にある。

以上のようなシミュレーションは、“(講義の)百聞は(シミュレーションの)一見に如かず”あるいは、自己流表現で“(数式の)百読は(シミュレーションの)一見に如かず”という信念の下に手作りした教材であり、基礎物理学向け Web-Based Learning 環境、またはマルチメディア CAL システムに組み込むための教材部品である。

今回の報告では、解析的に解くことができる2体問題とは違い、2個の物体(質点)の系に第3の物体(質点)を加えるだけで、特殊な物理的条件(境界条件と初期条件)の満たされる場合を除いて、解析的に解くことができなくなる「3体問題」⁴⁻⁶⁾を取り扱う。特に Web-Based Learning 環境等に組み込むための教材部品として手作りあるいは収集した3体問題の様々な運動、なかんずく特殊解の運動のシミュレーションについて報告する。

次の節において、3体問題についての基礎的知識を整理する。第3節において、手作りあるいは収集した3体問題のシミュレーションの中から典型的なシミュレーションの実行例をいくつか紹介する。第4節においては、手作りあるいは収集したシミュレーションを中心に、教材としてシミュレーションを活用する意義等について触れた後、今後の課題について考察する。なお、参考までに、付録として3体問題に関する追加的教材を作成し添付する。

2. 3体問題とは

力学史上「3体問題」とは、互いにニュートンの「万有引力」を作用しあう3個の質点からなる「3質点系」の運動を求めため、それを記述する運動方程式(3次元空間では、9個の連立微分方程式)を解析的に解く(時間について代数的に積分し、3質点の位置座標を時間の関数として表す)ことである。ただし、今日では後述のように、コンピュータを活用した数値積分によって3質点系の運動を求める問題も、自然に「3体問題」の範疇に含めて考えられるようになった。参考のため、3体問題を記述する運動方程式を次のページの表1に整理した。

3体問題は、18世紀後半のニュートン力学完成期に、オイラーやラグランジュ達によって研究し尽くされた歴史的テーマであり、特殊な物理的条件(境界条件と初期条件)の成立する場合を除いて、解析的に解くことができない、つまり一般解を求めることができないことで知られる難問でもある。この辺の事情を次々ページの表2で紹介・説明した。

20世紀末頃コンピュータの飛躍的な高性能化によって達成された超高速の数値計算技術が、解析的に解けない物理的条件の下での3体問題の解を(数値積分によって)求めることを可能にしたとは言え、18世紀に発見された特殊解(オイラーの直線解やラグランジュの正三角形解等)以外に、代数的積分による解は求められていなかった。

ところが21世紀に入って、既に1993年に数値解として発見されていた、質量の等しい3個の物体(質点)の「8の字解」が、解析的に安定であることが証明され⁷⁾、3体問題が必ずしも過去のテーマではないことが示された。

表1 3体問題を記述する運動方程式と解の性質

3次元デカルト直交座標系 O-xyz において、質量がそれぞれ m_1, m_2, m_3 の3質点 1, 2, 3 が互いに万有引力を作用しあうとき、これら3質点の位置座標 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ を記述するニュートンの運動方程式 (2 階の微分方程式 9 個)		
【x成分】 (1)+(2)+(3)より 3質点系の重心 のx成分 x_G は、 $\frac{d^2x_G}{dt^2} = 0 \dots (10)$ を満たす。	質点1 の運動	$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -G m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{r_{21}^3} - G m_1 m_3 \frac{x_1 - x_3}{r_{31}^3} \dots (1)$
	質点2 の運動	$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -G m_2 m_3 \frac{x_2 - x_3}{r_{32}^3} - G m_2 m_1 \frac{x_2 - x_1}{r_{12}^3} \dots (2)$
	質点3 の運動	$m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} = -G m_3 m_1 \frac{x_3 - x_1}{r_{13}^3} - G m_3 m_2 \frac{x_3 - x_2}{r_{23}^3} \dots (3)$
【y成分】 (4)+(5)+(6)より 3質点系の重心 のy成分 y_G は、 $\frac{d^2y_G}{dt^2} = 0 \dots (11)$ を満たす。	質点1 の運動	$m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = -G m_1 m_2 \frac{y_1 - y_2}{r_{21}^3} - G m_1 m_3 \frac{y_1 - y_3}{r_{31}^3} \dots (4)$
	質点2 の運動	$m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} = -G m_2 m_3 \frac{y_2 - y_3}{r_{32}^3} - G m_2 m_1 \frac{y_2 - y_1}{r_{12}^3} \dots (5)$
	質点3 の運動	$m_3 \frac{d^2y_3}{dt^2} = -G m_3 m_1 \frac{y_3 - y_1}{r_{13}^3} - G m_3 m_2 \frac{y_3 - y_2}{r_{23}^3} \dots (6)$
【z成分】 (7)+(8)+(9)より 3質点系の重心 のz成分 z_G は、 $\frac{d^2z_G}{dt^2} = 0 \dots (12)$ を満たす。	質点1 の運動	$m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} = -G m_1 m_2 \frac{z_1 - z_2}{r_{21}^3} - G m_1 m_3 \frac{z_1 - z_3}{r_{31}^3} \dots (7)$
	質点2 の運動	$m_2 \frac{d^2z_2}{dt^2} = -G m_2 m_3 \frac{z_2 - z_3}{r_{32}^3} - G m_2 m_1 \frac{z_2 - z_1}{r_{12}^3} \dots (8)$
	質点3 の運動	$m_3 \frac{d^2z_3}{dt^2} = -G m_3 m_1 \frac{z_3 - z_1}{r_{13}^3} - G m_3 m_2 \frac{z_3 - z_2}{r_{23}^3} \dots (9)$
r_{ij} の定義 ($i \neq j, i, j = 1, 2, 3$)		$r_{ij} = r_{ji} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$
求める位置座標 (9 個) = 重心運動の解 (3 個) + 相対運動の解 (6 個)		
重心運動の解 = 3 個の重心座標		相対運動の解 = 6 個の相対座標
(10)~(12)より、3質点の重心 (x_G, y_G, z_G) ; $x_G = (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) \div (m_1 + m_2 + m_3)$ $y_G = (m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3) \div (m_1 + m_2 + m_3)$ $z_G = (m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3) \div (m_1 + m_2 + m_3)$ の加速度は 0 である。これらの第 1 積分は、運動量保存の法則 3 個を与える。また、第 2 積分は、3 質点の重心座標を各々時間 t の 1 次関数で表し、重心が等速直線運動を行うことを示す。		3 質点の中の特定の質点に原点を置く相対座標系に移ると、6 個の相対座標(表 0 参照)を決める 2 階の微分方程式 6 個を得る。連立して 12 階の微分方程式を得る。 更に、3 質点の角運動量保存の法則 3 個と力学的エネルギー保存の法則 1 個を使えば、結局 8 階の微分方程式を得る(表 2 参照)。

3体問題の基礎的知識を概観するため、次々ページの表3において3体問題の定義やその典型的な解等を整理し、一覧表とした。ただし、3体問題における3質点系には外力が働いていないので、3質点系の重心は加速度がゼロであり、等速直線運動を行い、運動量の総和は保存される。表3に例示した解のほとんどは、例外を除いて、重心に原点をもつ「重心系」で観測される3質点の運動(軌道)を表す。また、すべての解は平面上で記述した運動を表す。

表2 20世紀末以前の3体問題研究史概略

【3体問題の定式化】質量がそれぞれ m_1, m_2, m_3 の3天体(質点)1, 2, 3が互いに万有引力を作用しあうと
 とき行なう運動はニュートンの運動方程式に従う。3次元デカルト直交座標系 $O-xyz$ (適当な慣性系)における、3
 天体1, 2, 3の位置座標をそれぞれ $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ とするとき、これら9個の位置座標
 は、それぞれ9個のニュートンの運動方程式、具体的には9個の「2階の微分方程式」で記述される(表1参照)。
 これら9個の微分方程式を連立させると、全体で18階の微分方程式を得るはずである。しかしながら、この
 微分方程式を解析的に解き(代数的に完全に積分し)、3天体の位置座標(9個)を時間の関数で表す(その一般
 解を求める)ことは至難の技であり、この2世紀半余の間幾多の研究者達の関心を惹き付けてきた。

【オイラーの古典積分の発見】3体問題の解は極めて複雑な軌道を表すものと推定されるが、微分方程式であ
 る運動方程式には、運動方程式の積分と言われ、3天体の位置座標、速度成分、時間の関係式で与えられる10
 個の積分が存在することが、既にL. オイラーによって18世紀中ごろに発見されている:

- (1) 重心積分(運動量保存の法則(3個)) \Rightarrow 3天体の運動量は一定である、および重心の位置座標
 の解(3個) \Rightarrow 3天体の重心が座標系に対して等速直線運動を行う)
- (2) 角運動量積分(角運動量保存の法則(3個)) \Rightarrow 3天体の原点に関する角運動量は一定である)
- (3) エネルギー積分(力学的エネルギー保存の法則(1個)) \Rightarrow 3天体の全エネルギーは一定である)

【新積分を探す研究】さて、3体問題の運動方程式は18階であるから、10個のオイラー積分以外にさらに8
 個の新積分が発見されれば、18階の微分方程式が代数的に完全に積分された、つまり運動方程式が解けたこ
 とになり、3天体の位置座標(3 \times 3個)と運動量(3 \times 3個)を知ることができる。それ故に18世紀後半から19
 世紀を通して、新積分を探す研究が、L. オイラー、J. L. ラグランジュ、C. G. J. ヤコビらによって行われ
 たが、最終的には“時間の消去”と“昇交点の消去”の方法が考案され(参考文献4参照)、18階の微分方程
 式は6階の運動方程式に帰着させられただけである。この新しい運動方程式において、さらに1つでも新積分
 が発見されれば、それはオイラー積分とは独立な新積分となるはずであったが、発見されなかった。

【特殊解の発見】このように3体問題を任意の初期条件の下で解くことは困難であったが、特殊な初期条件に
 対する解(特殊解)として、オイラーが直線解(1765)を、またラグランジュが正三角形解(1772)を発見して
 いた(ともに詳しくは、表3、図A1および参考文献4参照)。

【制限3体問題】さらに、共通重心を焦点とするケプラー運動を行う有限質量の2天体がつくる重力圏におい
 て無限小質量の第3の天体はどのような運動を行うかをテーマとする制限3体問題(詳しくは、表3と図A1
 参照)が研究された。それは、扱う運動方程式の階数が全体として6階に下がるため、一般(制限なし)3体
 問題と比較して驚くほど単純化されているという意味と、それにもかかわらず代数的積分によって一般解を求
 めるのは困難であり3体問題の本質的困難を失っていないという意味とにおいて、3体問題の研究に格好のテー
 マであった。特に、第1, 第2の天体の運動を円軌道に限定した円制限3体問題(詳しくは、表3参照)につ
 いては、ヤコビによって新たな保存量(ヤコビ積分)が発見され、第3の天体の運動に関する大局的な情報を
 得ることができるようになった。もちろん円制限3体問題においても、直線解や正三角形解という特殊解は存
 在する(詳しくは、表3、図A1および参考文献5参照)。

【オイラー積分以外の新積分は存在しない】さて、制限3体問題の研究と並行して、一般(制限なし)3体問
 題の研究はオイラー積分以外の新積分の発見を目指していた。しかるに、19世紀末に至って、ブルンス(H.
 Bruns, 1848-1919), P. バンルベ, H. J. ポアンカレらは、積分の形に制約を付したうえでそのような新積
 分が存在しないことを証明した⁹⁾。

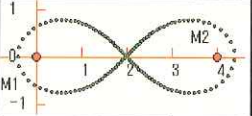
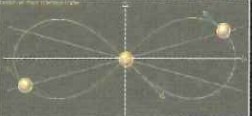



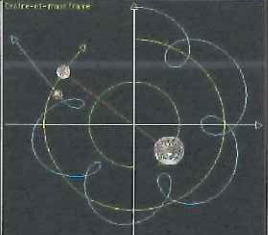
【3体問題の解の存在証明】これを契機に、20世紀になってからの研究は3体問題の解の存在そのものに向
 けられ、ポアンカレ、バンルベ、レビ・チビタ(T. Levi-Civita, 1873-1941)、ビスコンチニ(G. Biscioncini)
 らを経て、スンドマン(K. F. Sundman, 1873-1949)は、3天体の同時衝突*が起こらぬ限り、任意の初期
 値のもとに解が一意に存在することを証明した(1912)⁹⁾。質点の衝突の瞬間万有引力が無限大となるため、天
 体を質点とみなす仮定は本質的となる*⁹⁾。なお、3天体の同時衝突は角運動量積分の値が0のときに限られ
 る⁹⁾。スンドマンの結果は解析接続という数学的な操作を頻りに繰り返す労をいとわなければ、原理的に3天
 体の位置を計算できることを示唆するもので、この意味で3体問題は解けたといわれる⁹⁾。

【3体問題は数値的に解ける】20世紀後半、急速に発達したコンピュータを利用した3体問題の数値的解法
 の研究が盛んになった。天体を質点とみなすため、2天体の接近によって信頼できる数値解が得られなかつた
 が、1967年に運動方程式にクスターンハイモスチーフエルの変換という正則化をほどこしてその困難が除か
 れることが、当時イェール大学のサブヘイ(V. Szevehely), ピータース(C. F. Peters)によって明らかにさ
 れた⁹⁾。

*) ニュートン力学においては、天体/物体をすべて質点(表0参照)とみなすため、2天体間に働く万有引力
 が簡単な数式で表わされる代わりに、天体同士が限りなく接近できることになり、その結果2天体間の距離の
 2乗に反比例する2天体間の万有引力は限りなく大きくなることになる。このように“質点の仮定”は、ニュ
 ートン力学において、従って3体問題においても本質的かつ困難な問題を包含するのである。

**) この表の作成に際しては、堀源一郎氏の解説⁹⁾を参考とし、数箇所から文章を引用させて頂いた。

表3 3体問題の定義と特殊解等の分類

<p>3体問題 (3質点系)</p>	<p>互いに万有引力(重力)を作用しあう3個の天体/物体(質量 m_1, m_2, m_3 の3質点と見なされる!)が, <u>任意</u>の初期条件(初期位置と初速度)の下でどのような運動をするかを決める問題</p>			
<p>特殊な 初期条件 で決まる 特殊解</p>	<p>8の字解</p>	<p>注意: 楕円が 円になるとき 楕円の2つの 焦点は円の中 心となる!</p>	<p>3質点が常に 同一直線上にある オイラーの 直線解</p>	<p>3質点が常に 正三角形の頂点にある ラグランジュの 正三角形解</p>
<p>m_1, m_2 に 比べて, m_3 が限りなく 小さい 制限 3体問題</p>	<p>m_1, m_2 の重力場 の影響下で m_3 が 8の字を描く解¹⁰⁾</p> 	<p>円制限 3体問題</p> <p>楕円制限 3体問題</p>	<p>m_1, m_2 が互いに共通重心を中心(焦点)として円(楕円)を描くとき, m_3 が m_1, m_2 を通る直線上の3平衡点* L_1, L_2, L_3 にある直線解, および m_3 が m_1, m_2 と正三角形をなす2平衡点* L_4, L_5 にある正三角形解がある。</p>	
<p>m_1, m_2, m_3 に大差が ない (一般) 3体問題</p>	<p>$m_1 = m_2 = m_3$ のとき m_1, m_2, m_3 が 8の字を描く解¹¹⁾</p> 	<p>円 3体問題¹⁰⁾</p> <p>楕円 3体問題</p>	<p>$m_1 : m_2$: $m_3 =$ 5 : 4 : 2</p> 	<p>$m_1 : m_2$: $m_3 =$ 3 : 2 : 1</p> 
<p>数値積分で 解ける制限 3体問題の ポピュラー な解の例</p>	<p>3天体が 太陽 (m_1) 地球 (m_2) 月 (m_3) の場合</p> 		<p>3天体が 地球 (m_1) 月 (m_2) 人工衛星 (m_3) の場合¹¹⁾</p> 	
<p>楕円(制限)3体問題, 円(制限)3体問題の 直線解 または 正三角形解</p>	<p>常に同一直線上または正三角形の3頂点にある3天体が, これらの共通重心に, それぞれ, 焦点の1つ(円軌道の場合は中心)をもつ同一離心率³⁾のケプラー運動を行う。解は, これら3つの“ケプラー運動”の重ね合わせで与えられる。</p> <p style="text-align: right;">以上まとめ!</p>			
<p>* ラグランジュの平衡点⁵⁾ (Lagrange points): 1772年 J. L. ラグランジュが, 2個の天体(質量 m_1, m_2) が共通重心のまわりに円運動を行い, 第3の天体の質量が無視できるほど小さい ($m_3 \approx 0$) 円制限3体問題において発見した特殊平衡解のこと。共通重心を原点として x 軸上に常に2天体があるような回転座標系を考えると, x 軸上の3点 (L_1, L_2, L_3) は直線平衡点(直線解), および2天体と共に正三角形をなす2点 (L_4, L_5) は正三角形平衡点(正三角形解)となる。詳しい図解と解説は, 付録の図A1を参照されたい。</p>				

3. 3体問題のシミュレーション教材とその実行例

ここでは、前節の表3で一覧表にした3体問題の特殊解等の中の典型的な解を視覚化したシミュレーション(アニメーション)を紹介しよう。筆者の手作りしたものを図1(a), (b), (c), (d)に、また内外のWebサイトから収集したものを図2(a), (b), (c)および図3(a), (b), (c), (d)に示す。

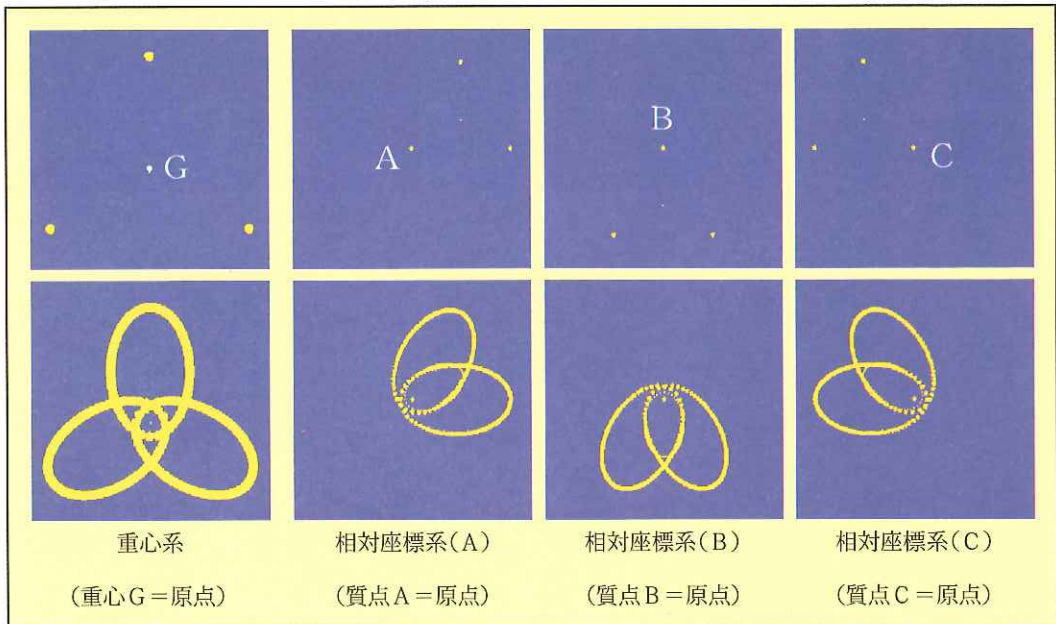


図1(a) 一般3体問題の正三角形解の、重心系と相対座標系での軌道の比較

上段の図は、正三角形の頂点に置かれた3質点が適当な初速度で運動を開始する直前の状態を表す。下段の図は、相等しい質量をもつ3質点についての一般3体問題における正三角形解をシミュレートしたときの軌跡(1サイクル)を表す。左端に示した重心系における軌跡と、比較のため、その右に3種類の相対座標系における軌跡(大きさを左端の半分に縮小したもの)を用意した。ただし、右の3種類の軌跡は、本質的に同じものである。なお、ここに紹介した下段の図は、Wolfram Research社のMathematica 4.1を用いて、教材として理想的な軌道を描く典型的な初期条件⁹⁾等の下で作成した3質点の運動のアニメーションをApple Computer社のQuickTime/Proに読み込んで作成したQuick Time Movie(図1(b), (c), (d)を参照)の軌跡図(トレース)である。上段の図も、このQuick Time Movieの初期($t=0$)画面である。

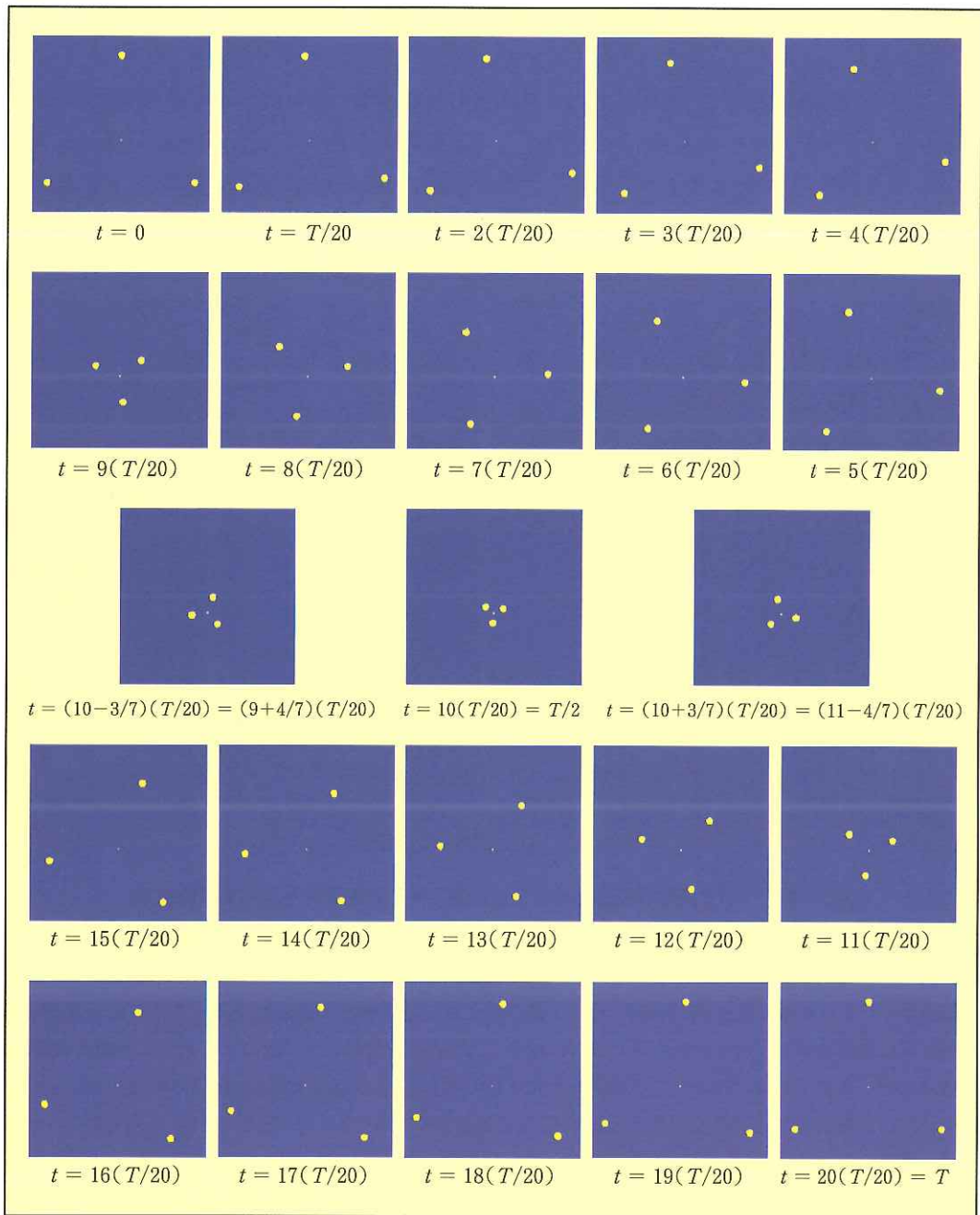


図 1 (b) 図 1 (a) の正三角形解の軌道シミュレーションの代表的な 23 コマ

図中 T は、3 質点が常に正三角形の頂点に位置する 3 質点系が、その重心の周りを 1 回転する周期を表す。この場合、質点系は反時計回りに回転している。なお、ここに紹介するアニメーションの代表的な各コマの画面は、そのアニメーション (1 サイクル) を構成する 139 コマの中から典型的な 23 コマを選び出したものである。ただし、第 2, 4 行 のコマの配置の時間的順序は、他の行と逆向きになっている。

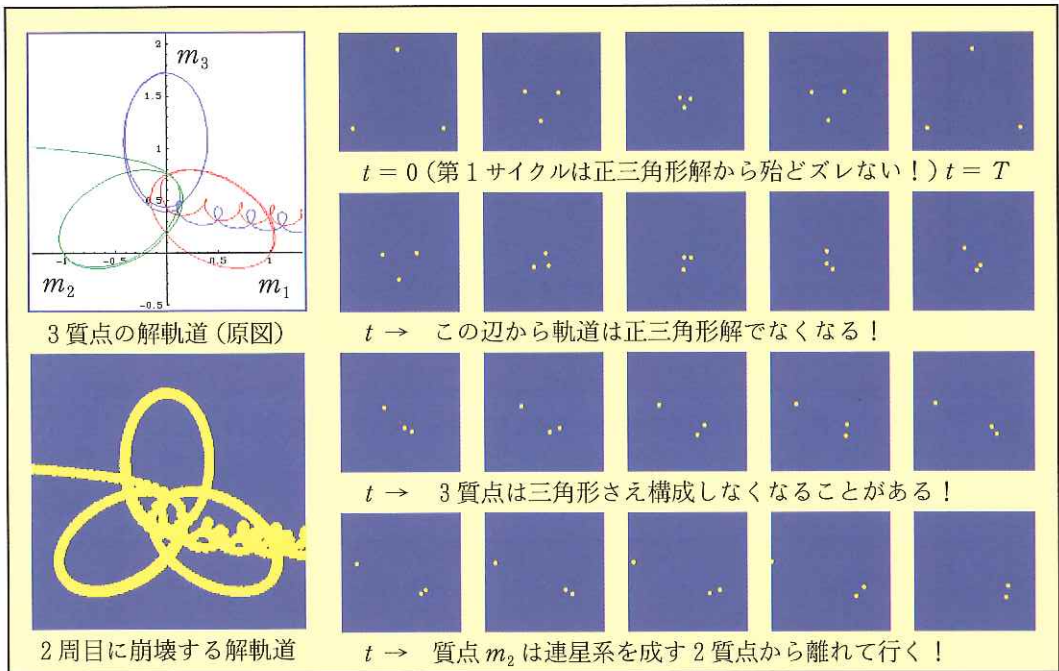


図 1 (c) 図 1 (a), (b) の正三角形解軌道が m_1 の初速度 0.05% 微増で受ける大変化

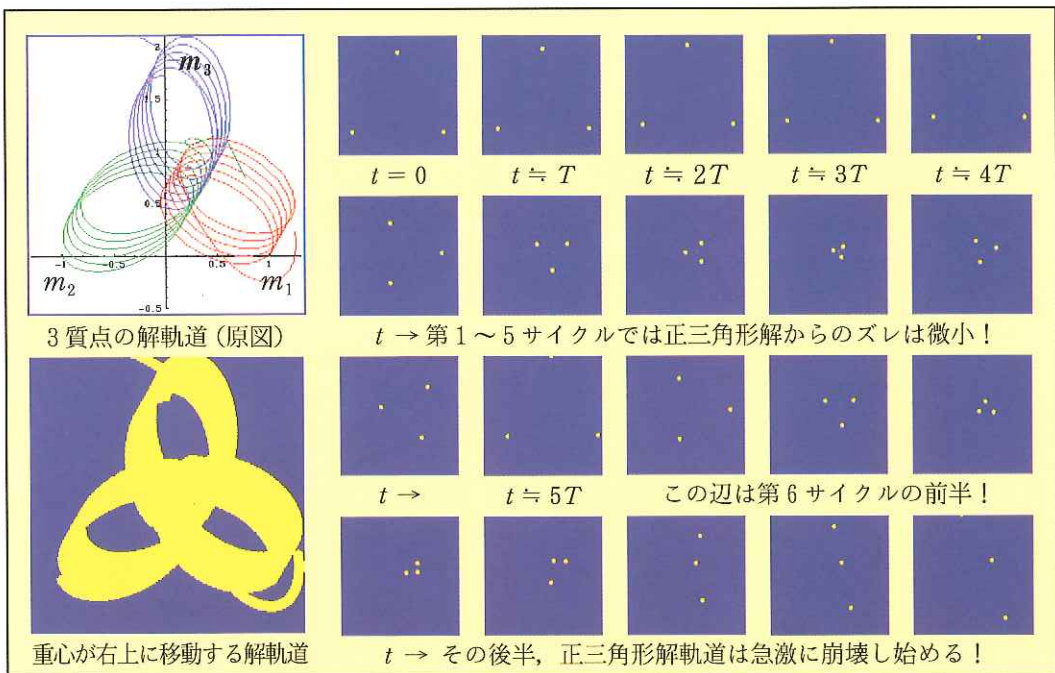


図 1 (d) 図 1 (a), (b) の正三角形軌道が m_1 の質量 20% 増加で受ける大変化

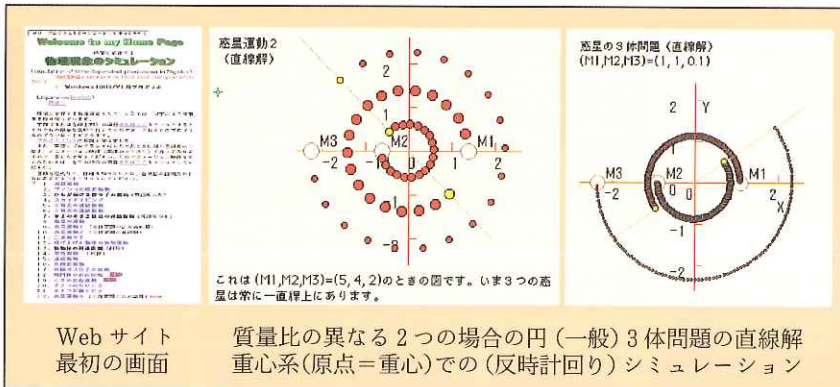


図2(a) Web サイト『物理現象のシミュレーション』の「惑星運動2」より¹⁰⁾ このサイトの URL は, <http://www6.ocn.ne.jp/~simuphys/buturisimyu.html> である。 図2(a), (b), (c)の軌道図は, このサイトで公開中のシミュレーション実行例である。

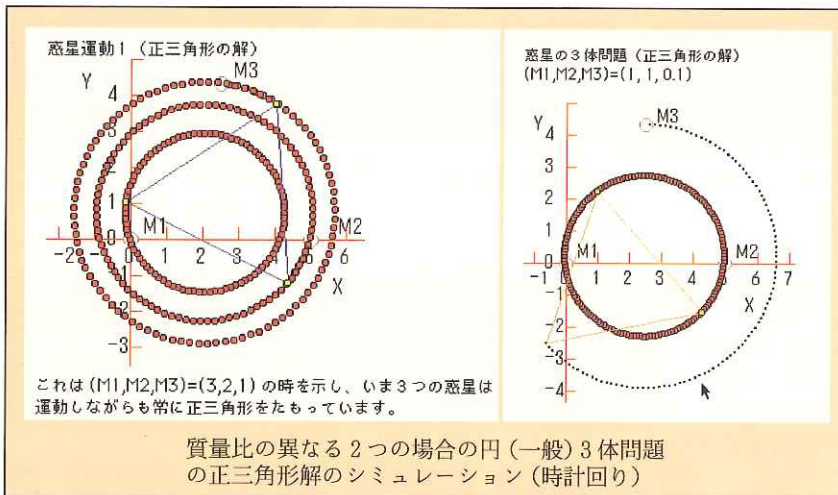


図2(b) Web サイト『物理現象シミュレーション』の「惑星運動1」より¹⁰⁾

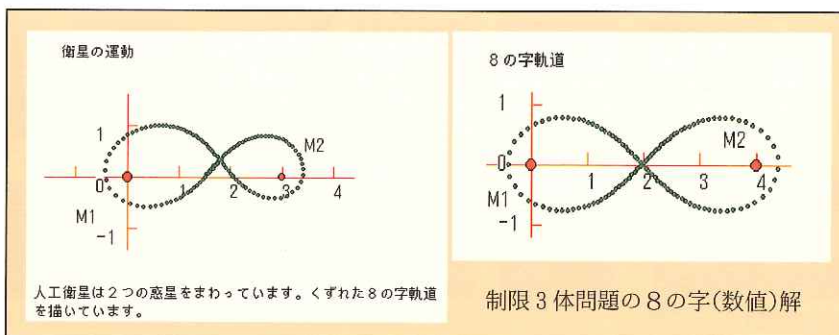


図2(c) Web サイト『物理現象のシミュレーション』の「衛星の運動」より¹⁰⁾

Eugene Butikov personal page | Contents | Next section

Collection of remarkable three-body motions -- Overview

Classical dynamics and many-body systems

The motions of planets and other celestial bodies give the most convincing observational support for the laws of classical Newtonian mechanics. In this wonderful space laboratory all phenomena are observed in their purest form, without the complication of friction and air resistance that are inevitable in an ordinary earth laboratory.

The differential equations of motion for a body under the central inverse square gravitational force (for a planet orbiting a star or a satellite orbiting the planet) have exact analytic solutions (a *single-body* Kepler problem). The striking mathematical simplicity of trajectories is a distinctive feature of Keplerian motion. Any possible motion in the Newtonian inverse square gravitational field occurs along one of the *conic sections* - curves formed by the intersection of a circular cone by a plane. Exact analytic solutions exist also for the motions of two celestial bodies attracted by mutual gravitational forces - this *two-body* problem, mathematically may be reduced to the case of a single body which moves in an effective stationary inverse square gravitational field.

The most fascinating phenomena of celestial mechanics are revealed in the motions of three or more bodies attracted to one another by gravitational forces. If a third body is added to a system of two interacting bodies, the *three-body* problem generally becomes analytically unsolvable, that is, there exist no general formulas that describe the motion and permit the calculation of positions and velocities of the bodies from arbitrary initial conditions. The lack of analytic solutions is related to the extraordinary complexity of possible motions. Some examples included in the presented collection of Java applets allow us to observe fascinating trajectories of three-body motions that delight the eye and challenge our intuition. However, among the great variety of extremely complex motions there exist a finite subset of very simple regular motions. Some of these regular motions are also illustrated in this collection.

The following applets are included in the collection:

1. [Restricted three-body problem -- a satellite in the binary planet system](#)
2. [Examples of the restricted three-body problem \(in two frames of reference\)](#)
3. [Figure-eight periodic planar three-body motion](#)
4. [Figure-eight three body motion in two frames of reference](#)
5. [Various of figure-eight planar three-body motion](#)
6. [Three-body motions in the equilateral configuration](#)
7. [Regular planar motions of four bodies of equal masses](#)

The applets of this collection are created with the help of *Easy Java Simulations* tool developed by Francisco Esquembre, professor at University of Murcia, Spain.

Many other examples of orbital motions can be found in the extensive package of educational software *Planets and Satellites* distributed by the American Institute of Physics. The package was developed by the author as a desktop laboratory for individual highly interactive work to help students visualize and explore the laws of dynamics as they apply to both natural planetary systems and artificial satellites. The programs of this package illustrate Kepler's laws, trajectories in velocity space, various families of orbits, evolution of an orbit in the atmosphere, active manoeuvres in space and relative motions of orbiting bodies, procession of an orbit, motions of a binary star components, a planet in a double star system, several planets orbiting a star, encountering planetary systems that exchange planets, and much more.

Besides working with the supplied preselected examples, with this package students have an opportunity to construct and investigate a model of the solar system, or to create an imaginary planetary system on their own, complete with the star, planets, moons, comets, asteroids, and satellites. Advanced students can use the package for mini-research physics projects designing active maneuvers for an interplanetary space flight and modelling it in the simulation experiment, or creating a planetary system and exploring its evolution, etc.

Action Equilateral Three-Body Configuration

START STOP RESET STEP CLEAR

Show traces Collection Reverse

Time = 0.00

Animation Delay = 10

Action Equilateral Three-Body Configuration

START STOP RESET STEP CLEAR

Show traces Collection Reverse

Time = 0.54

Animation Delay = 10

Action Equilateral Three-Body Configuration

START STOP RESET STEP CLEAR

Show traces Collection Reverse

Time = 1.00

Animation Delay = 10

図 3 (a) Web サイト “Classical dynamics and many-body systems” より¹⁾

図の左半分は、Professor Eugene Butikov (St. Petersburg State University, Russia) が、Professor Francisco Esquembre (University of Murcia, Spain) が開発したツール Easy Java Simulations を用いて、教育用に作成した Java Applets を公開している Web サイトであり、その URL は、<http://www.ifmo.ru/butikov/Projects/Collection.html> である。図の右半分は、6 の□の実行例で、質量比が $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 0.6 : 0.3$ である 3 天体の正三角形楕円軌道 (楕円一般 3 体問題の正三角形解) の時計回りアニメーションの典型的な 3 コマである。右上から順にそれぞれ、時間 $t = 0$, $t = 0.54T$, $t = T$ (T は 3 質点系の重心周りの回転周期) に対応する。図中の矢印は、各天体の速度ベクトルを表す。図 3 (b), (c), (d) も同サイトで公開中の Java Applets の実行例である。

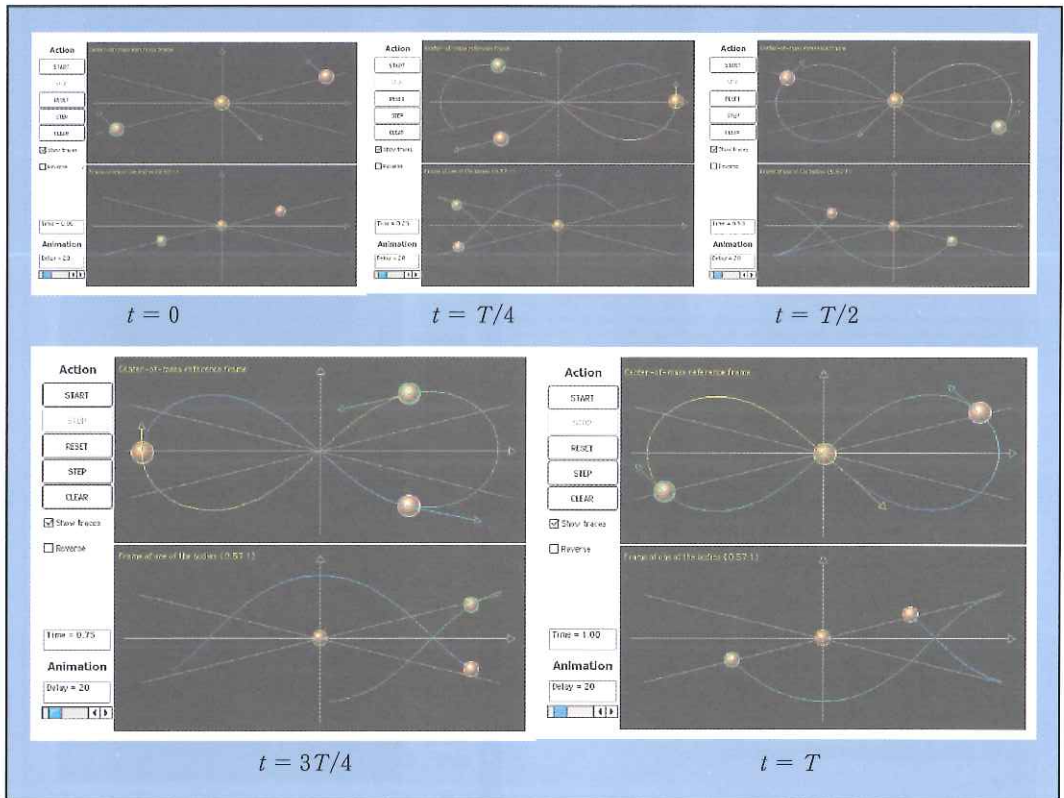


図 3 (b) Web サイト “Classical dynamics and many-body systems” の 4 の ①より¹¹⁾

2000 年から 2001 年にかけて Professor Richard Montgomery (University of California, USA) 達は、相等しい質量をもつ 3 質点についての一般 3 体問題に対する「8 の字解」(the figure-eight solution) が新しい安定解として存在することを証明する一連の論文を発表した⁹⁾。上の図は、この 8 の字解の軌道をシミュレートして作られたアニメーションの 1 サイクル (周期は T) の中の典型的な 5 コマである。それぞれのコマの図において、細い白線の上の軌道は、3 質点の重心に原点を置く重心系で描いたとき、この新しい安定解が 8 の字軌道を描く様子を示す。一方、細い白線の下軌道 (上の 57% に縮小されている!) は、初期位置 ($t = 0$) で中央にあった質点に原点を置く相対座標系で同じ解を描いたものであるが、観測の視点が違う訳であるから当然のことながら最早 8 の字を描かない。

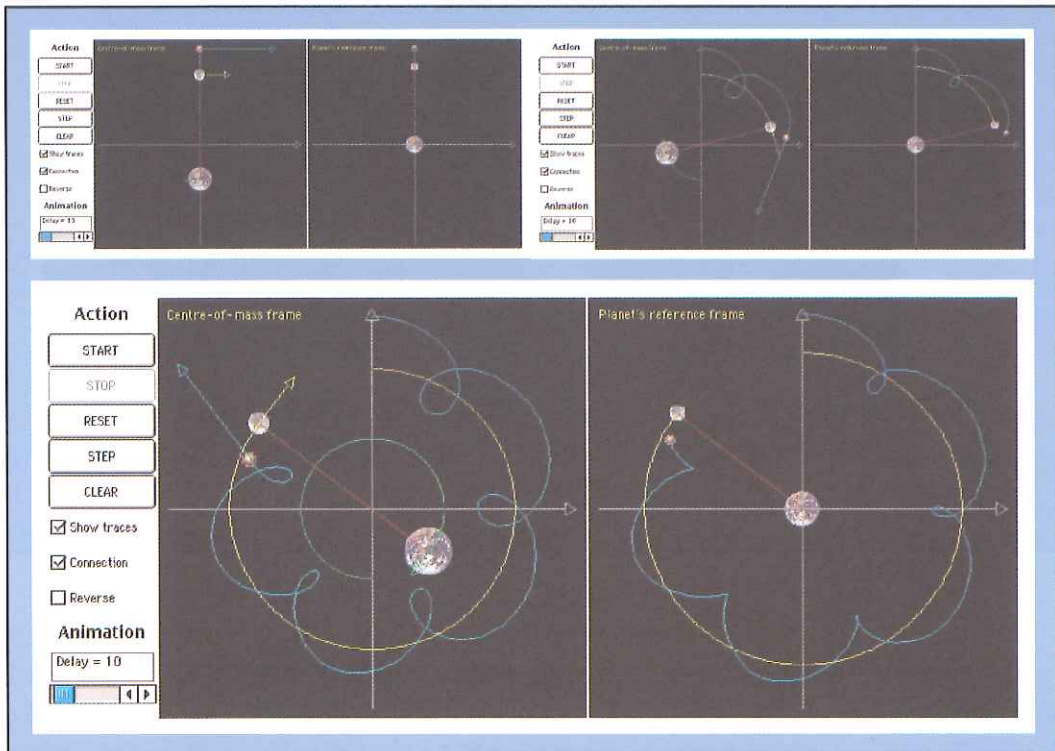


図 3(c) Web サイト “Classical dynamics and many-body systems” の 2 の①より¹⁾

地球の周りを公転する月と人工衛星（または、太陽の周りを公転する地球と月を想定してもよい！）の軌道のアニメーション（シミュレーション）の典型的な 3 コマである。これは、天文学上重要かつ身近な制限 3 体問題である。左上の図は、3 質点の初期位置座標と初速度ベクトル（矢印）を表す。それぞれのコマの図において、細い白線の左側は、3 質点の重心（人工衛星の質量は事実上ゼロとみなされるので、地球と月の重心に一致）に原点を置く重心系において 3 質点、なにかんづく人工衛星が描く軌道を表す。一方、細い白線の右側は比較のため、地球（の重心）に原点を置く相対座標系において同じ 3 質点が描く軌道（右側の図のサイズは左側に比べて縮小されている！）を表す。

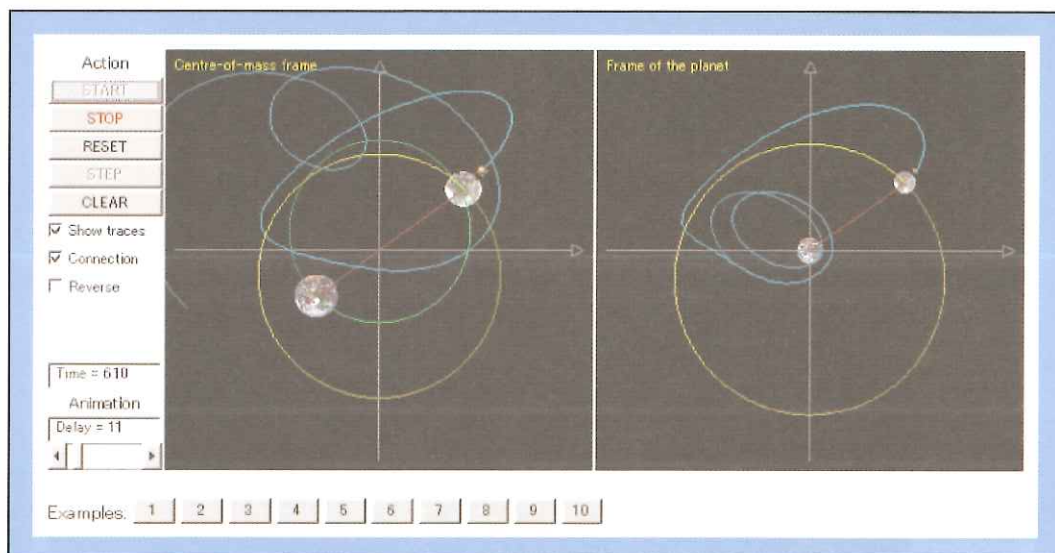


図 3 (d) Web サイト “Classical dynamics and many-body systems” の 2 の④より¹¹⁾

この図は、図 3 (c)と同様の制限 3 体問題の例で、地球の周りを公転する月と人工衛星（質量は事実上ゼロとみなされる！）の軌道のアニメーションである。相異なる 10 種類の初期条件によってそれぞれ決まる 10 種類の運動から任意の運動を選ぶことができる。それには、図の最下端 (Examples の右側) にある 10 個の方形メニュー・ボタンの中から対応するボタンを選択クリックすればよい。図 3 (c)は人工衛星の安定な軌道を観測できるメニュー・ボタン①を選んだ場合であったが、図 3 (d)は、不安定な軌道を観測させるメニュー・ボタン④を選んだ場合であり、メニュー・ボタン①の場合の初期条件（初期位置座標と初速度ベクトル）に微妙な変化を加えただけで、相当時間経過後、人工衛星が運動の安定性を失い徐々に不規則性を増して行った結果、今まさに月に衝突せんとする瞬間を表す。細い白線の左側は、重心系での 3 質点の軌道、なかんずく人工衛星の不安定軌道を表し、細い白線の右側は、相対座標系において同じ状況にある 3 質点の軌道（右側の図は左側に比べて縮小されている！）を表す。

4. おわりに

さて、この節ではまず、前回²⁾と今回の報告で紹介した様々なシミュレーション（アニメーション）教材の活用を念頭に、それらの特徴や学習の流れにおける効用等について考察する。

①物理法則は、通常“数学的表現”で記述されて初めて発見となるが、その発見に辿り着くには、歴史上大抵の場合、自然現象の観測が出发点となる。このような“帰納的な”発見プロセスの“擬似的”模倣から、手作りのあるいは内外の Web サイト提供の様々なシミュレーション教材を用いれば、次のような学習環境を提供できると考える。

即ちそれは、最初は学習者に物理法則の数学的表現を提示せず、その視覚化された形、特にそのコンピュータ・シミュレーションによりアニメーション化された幾つかの形を、学習が深

まるように工夫した段階を追って提示し、学習者の視覚的／直感的かつ論理的理解を経た後、学習者が最終的に学習中の物理法則（特にその数学的表現）を理解できるように手助けする環境である。

もちろん、この同じ環境は逆に、学習者に先に数学的表現を提示し、しかる後に数学的表現を視覚化したアニメーション教材を提示することによって、物理法則を言わば“演繹的に”理解させようとする従来型の学習環境を提供することもできる。

②前回報告した質点系と2体問題を扱う手作り教材（参考文献2の図1を参照）や今回報告している3体問題を扱う手作り教材（図1を参照）などは、Java等の開発言語を駆使するシミュレーションの専門家ではない教師が、数式処理あるいは数値計算向きのアプリケーション・プログラム等を活用して作成した手作り教材である。講義を担当する現場の教師が自分の授業の流れの中で役に立つ最適のシミュレーション教材を創るということは、理想的な姿であるが、通常現場の教師が、自分の授業で必要と思われる独自の機能を備えた教材を自由自在に創る素養を必ずしも持ち合わせている訳ではない。

③上述のようなシミュレーションの専門家が作成したシミュレーション教材では、通常自由に初期条件等を設定できるようになっているが、過去に見付けた教材では、シミュレートされる運動物体は、初期条件等、特に初速度や質量（比）の微小な変更に対してさえ、極めて敏感にその軌道を変えてしまうため、学習者が画面からその軌道を一瞬のうちに見失ってしまうことが多く^{12,13)}、何らかの工夫が必要であると感じていた。

そこで、入門的学習者が、混乱に落ち入ることなく学習中の物理法則を“観測”できる環境を実現するために、教材として理想的な軌道を描く典型的な初期条件等に対応するシミュレーション教材部品を、予め何種類かメニュー形式で用意しておき、学習者が学習の流れの中で自分の興味に応じてメニューを選択できるように工夫した。更にまた、そのようなメニューを備えた内外のWebサイトをも収集した。

例えば、前回の報告では、2体問題において、質量（比）の変化や座標系の変更に対してケプラー運動がどのように変化するかを観測できる手作り教材（参考文献2の図1を参照）を紹介した。

今回の報告では、3体問題において、初速度や質量（比）の変化、あるいは座標系の変更に対してラグランジュの正三角形解の周期的な運動がどのように変化するかを観測できる手作り教材（図1、特に(c), (d)を(a), (b)と比較参照）を紹介している。

また、国内のサイトで見付けた教材（図2を参照）では、3質点の質量比の組み合わせ毎にアニメーション実行画面が用意されているので、運動を観測する毎にアニメーション実行画面を変更すればよい。

更に、海外のサイトで見付けた教材（図3を参照）では、特に図3(d)からわかるように、アニメーション実行画面の下段に、互いに少しずつ違う初期条件に対応するメニューボタンが数

個並んでおり、それらの中から興味あるボタンをクリックすることによって、3体問題の場合は、初期条件にわずかな変化が生じただけでも、3質点の運動に如何にドラスティックな異変が現れるかを観測できる。

次に、前回の報告において物理学の基礎的教材の視覚化に話を限定して箇条書きにまとめた今後の課題を、そのまま再度列記すると以下の如くである。ただし、各項目の最後の【…】内の記述は、今回加筆したコメントである。

①質点系力学の理解を深めるためには、少なくとも3体問題のシミュレーション教材を用意する必要があることに鑑み、3体問題が歴史上解決されている典型的な初期条件等の下でのシミュレーションを中心に教材モジュールを開発すること。【これについては、今回報告したような教材の手作りを試みたが、未完あるいは不十分である。】

②物理学史上エポックメイキングな実験（例えば、自由落下／斜面の実験、ラザフォードの実験など）の、仮想空間における“再体験”を可能にするシミュレーション教材の開発。【古典力学に属する手作り教材は、次回報告予定！】

③物理学の基礎的教材／学習項目（例えば、放物運動、振動、衝突、拡散など、あるいは、電磁場の下での荷電粒子の運動、特殊相対論的効果、原子構造など）の視覚化／シミュレーション化。【古典力学に属する手作り教材は、次回報告予定！】

④エネルギーなどの抽象的な概念を、数式をただグラフ化する方法以外の方法で視覚化すること。【実現は困難？】

⑤原理的に視覚化は可能であるが、ヒト（高度の専門家）とモノ（高性能機器）とカネ（巨大予算）を必要とするため視覚化が実現困難な教材／学習項目（例えば、 n 体問題の3次元シミュレーションなど）の視覚化／シミュレーション化。【実現は困難である。しかし、製作に相当の技術と経費を必要としたかも知れないが公開されている教材のWebサイトでの発見を期待している！】

⑥市販されているビデオ／アニメーション教材、専門家が物理現象を本格的に視覚化／シミュレーション化したビデオ／アニメーション、あるいはシミュレーション・プログラムそれ自体を（虫のよい話であるが、大金を使わずに）使用させてもらうにはどうすればよいか。【著作権に注意が必要であるが、今回の報告で紹介した教材のように、教育用を想定して公開されている内外のWebサイトでの発見を期待できる！】

以上をもって本報告のまとめとする。

付 録

参考までに、付録として3体問題に関する追加的教材を整理した図A1を添付した。

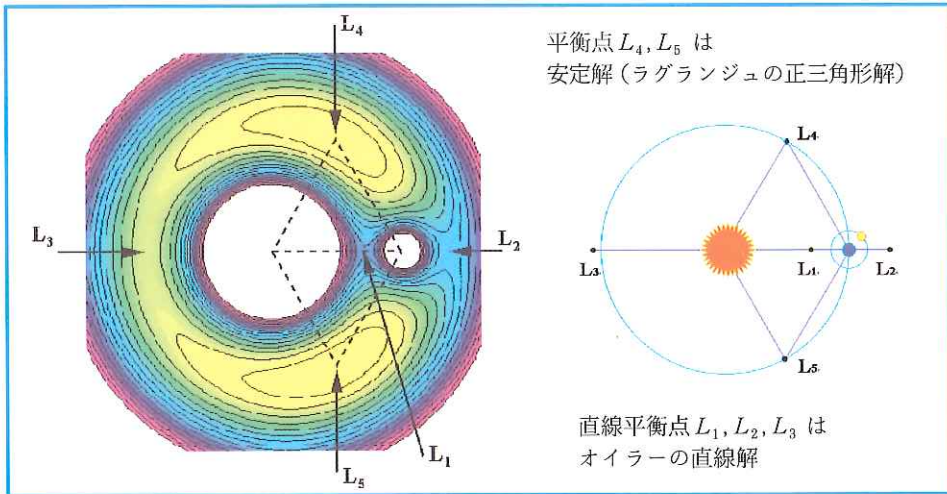


図 A1 ラグランジュの平衡点 (Lagrange points)

左の図¹⁴⁾は、Professor Neil J. Cornish (Montana State University, USA) の Web サイト (<http://www.physics.montana.edu/faculty/cornish/lagrange.html>) で公開されている、制限3体問題に対する実効ポテンシャル等高線図 “A contour plot of the effective potential” を引用転写したもので、2個の天体 (右の図では太陽 \odot と地球 \bullet を想定している!) の共通重心を原点とし x 軸上に常に2天体があるような回転座標系の上で、2天体のつくる実効ポテンシャルがもつ5個のラグランジュの平衡点を図解している。ポテンシャル ϕ の大きさは、濃い黄色の部分が高くて、黄色、黄緑色、薄い青色、濃い青色、紫色の順に減少する。ポテンシャル ϕ の等高線の間隔が狭くなれば、等高線に垂直な方向のポテンシャル ϕ の勾配 (今仮にこの垂直方向の座標を r とすると、 $\partial\phi/\partial r$ は大きくなるので、 ϕ の大きい所から小さい所に向かって等高線に垂直な方向に働く力 ($F = -\partial\phi/\partial r$) は強くなる。逆にポテンシャルの等高線の間隔が広くなれば、等高線に垂直な方向に働く力は弱くなる。2天体とともに正三角形の頂点に位置する平衡点 L_4, L_5 は、丘に例えればそれぞれ、最も高い丘の中央にある。しかし、その周辺が広範囲にほぼフラットであるため、そこに第3の天体 ($m_3 \neq 0$) がある場合、それはそこに留まり続けることができる。この正三角形解は、2天体の質量比 (m_1/m_2) が 24.96 より大きい限り安定であり、この条件は、2天体が太陽と惑星 (木星、地球等を含む) の場合でも、惑星 (冥王星を除く) と衛星の場合 (例えば地球と月) でも成立している。例えば、太陽系には太陽と木星とで正三角形をなすトロヤ群小惑星が、平衡点 L_4, L_5 の両方にあること、土星には正三角形をなす衛星の組があることなどが知られている。更に、地球と月を結ぶ線分を1辺とする正三角形の頂点が、スペースコロニーの建設候補地になっているという。一方、2天体を通る直線上にある平衡点 L_1, L_2, L_3 (相対的な位置は質量比で決まる) は、丘の中腹にあり周辺がなだらかでない鞍点 (saddle points) であり、そこに第3の天体があっても、それは、2天体を通る直線に垂直な方向には両方から押す力を受けるが、この直線に沿った方向には両方から引っ張られる。つまり平衡点 L_1, L_2, L_3 にある第3の天体は、そこに長く留まり続けることはできない。

参考文献

- 1) 池村 勉：質点系力学の重心系の概念からニュートンの絶対空間を理解する —歴史的教材から出発して未解明の原始宇宙をのぞく—, 大学教育研究所年報, 阪南大学大学教育研究所, 第3号, pp. 50–80 (2000. 6).
- 2) 池村 勉：2体問題のシミュレーションを通して質点系力学の基礎概念を理解する —基礎物理学学習用マルチメディア CAL システムのモジュールの開発—, 情報科学研究, 阪南大学情報処理研究センター, 第15号, pp. 30–45 (2001. 3).
- 3) 戸田盛和：6 質点系の力学, 物理入門コース1 力学, 岩波書店, pp. 143–161 (1983).
- 4) 原島 鮮：力学II —解析力学—, 裳華房, pp. 124–132 (2002).
- 5) 木下 宙：天体と軌道の力学, 東京大学出版会, pp. 97–133 (1998).
- 6) 堀 源一郎：三体問題, 世界大百科事典 第2版 (プロフェッショナル版スペシャル Windows98 /95/NT 版 CD-ROM), 日立デジタル平凡社 (2000).
- 7) Richard Montgomery : A New Solution to the Three-Body Problem, *Notices of the AMS*, Vol. 48, No. 5, pp. 471–481 (May 2001).
- 8) 鈴木芳文, 近浦吉則：*Mathematica* で実習する基礎力学, 培風館, pp. 112–117 (1999).
- 9) 小国 力：*Mathematica* の基礎と応用, サイエンス社 (1997).
- 10) こまめに更新されており, 作品数の多い国内の Web サイト (残念ながら, 現在作者不祥であるが, 最新の初期画面を図 2 (a) に引用した!), 時間に依存する物理現象のシミュレーション, その URL は, <http://www6.ocn.ne.jp/~simuphys/buturisimyu.html>.
- 11) Eugene Butikov (St. Petersburg State University, Russia) による海外の本格的な Web サイト, Classical dynamics and many-body systems (最新の初期画面を図 3 (a) に引用した!), その URL は, <http://www.ifmo.ru/butikov/Projects/Collection.html>.
- 12) 昔からよく知られている, やや古い作品としては, Blas Cabrera : Kepler, *Physics Simulations I : Mechanics*, Intellimation, Inc., Version 2 (1990).
- 13) ゲーム感覚を備えた本格的 3 次元シミュレーションであるが, 使い勝手が少々複雑であるため初心者には分かりにくい作品として, 例えば, Dan Reed : Gravitator 2, a freeware downloaded from <http://www.geocities.com/composerhair/>, Version 2 (2001).
- 14) Neil J. Cornish (Montana State University, USA) の Web サイト, A contour plot of the effective potential (付録の図 A1 の中の左の図は, これから引用転写したもの), その URL は, <http://www.physics.montana.edu/faculty/cornish/lagrange.html>.

(2003年3月24日 受理)