ガリレオの斜面の実験と思考実験をシミュレートするアニメーションの製作

── 基礎物理学用 Web-Based Learning System の部品の開発 ──

池　村　　勉

Making Animations Simulating Galileo's Inclined Plane and Thought Experiments

── Development of Some Parts of a Web-Based Learning System for Fundamental Physics ──

Tsutomu IKEMURA

アブストラクト

In order to assist learners of physics in grasping how Galileo Galilei discovered the law of free fall and the concept of inertia on the basis of Galileo's inclined plane and thought experiments, various animations simulating these experiments have been developed under the different kinds of typical physical conditions. All the animations of Galileo's inclined plane and thought experiments are those observed by an observer on the earth, except for the animation of the thought experiment in which an observer on the moon, for example, is supposed to observe a ball, which has been accelerated by rolling down an inclined plane placed near the North Pole, running at a constant speed around the surface of the earth. In addition, special consideration is given to Galileo's pendulum experiments in connection with the law of free fall.

キーワード： シミュレーション，斜面の実験，思考実験，落下の法則，慣性，ガリレオ。

１．はじめに

近代力学が産声を上げたのは，自然現象を「観測・実験」してそこに潜む原理・法則を帰納し，あるいはそれらを演繹して新しい現象を説明ないし予言するに当たって，必ず「数学的記述・表現」を活用するようになった17世紀の“科学革命”の時代であったと考えられる。

この時代の初期に活躍したヨハネス・ケプラー（Johannes Kepler, 1571-1630，ドイツ）は，ティコ・ブラーエ（Tycho Brahe, 1546-1601，デンマーク）による約20年間の肉眼による精密な惑星観測データから革命的な“実験法則”を帰納した。それが，“天上の法則”とも言える「ケプラーの法則」（第１・２法則：『新天文学』1609，第３法則：『世界の調和』1619）である。

ケプラーと同時代に活躍したガリレオ・ガリレイ（Galileo Galilei, 1564-1642，イタリア）は，「振り子の等時性」と「斜面の実験」から「落下の法則」，斜面の実験を発展させた「思考実験」から「慣性」の概念（共に『新科学対話』1638）を発見した。これらは“地上の法則”とも言

えるものである。地球の表面（水平面）に沿った「円」周上に閉じ込められていた「慣性」の概念も，やや後輩のルネ・デカルト（René Descartes, 1596-1650，フランス）によって，重力が取り除かれ，「直線」上で成り立つ「慣性の法則」（『哲学原理』1644）に発展させられた。

機が熟していた17世紀後半にタイミング良く登場したアイザック・ニュートン（Isaac Newton, 1642-1727，イギリス）は，アリストテレス（Aristoteles, 382 BC-322 BC）が主張して以来の，天上界（神の世界）と下界（人間の世界）とでは支配法則が違うという区別を廃し，ケプラー，ガリレイ，デカルトたち先達の研究成果を見事に“総合”し，全宇宙において普遍的であるとする「運動の３法則」と「万有引力の法則」（共に『プリンキピア』1687）を帰納・発見した。同時に彼は，これらの法則を演繹して「ケプラーの法則」や「落下の法則」等を導けることを示して，近代力学（ニュートン力学／古典力学）の確固たる基礎を築いた。

ニュートン以後，これらの法則は，例えば新しい天文現象の説明または予言に適用されて成功を収め，デカルトの渦動宇宙論を排したが，その機械論的自然観とは相俟って，宇宙におけるすべての物体の未来の運動を，“初期条件”さえわかっていれば，正確に予言できるとする「力学的決定論」が勃興する基盤を形成した。このような思想は，19世紀中にヨーロッパ一円に広がり，量子力学と相対性理論が誕生し発達した20世紀を経ても，その基本的な影響力は衰えなかった。

このような物理学の成功，ひいては自然科学の成功をまのあたりにした当時の学者たちの中には，人間の行動を支配する法則，例えば経済学の法則を求め，社会科学を創造しようとする人たちが現れた。最も著名な人物の１人として，『富国論』（1776）を著した経済学の元祖 アダム・スミス（Adam Smith, 1723-1790，イギリス）が挙げられる。

さて，今回は，近代力学の父とも称されるガリレオ・ガリレイの足跡を，主に「斜面の実験」や「思考実験」にスポットライトを当てつつ辿る基礎物理学学習用教材を作成すると同時に，そのシナリオに沿って適宜配置された，学習者の視覚的理解に訴えるアニメーション教材を作製した。ここに，アニメーション教材を中心として，これらの教材の詳細を報告する。

２．斜面の実験と思考実験をシミュレートするアニメーション

この節では，前半において，ガリレオの「斜面の実験」の概要を説明する。後半において，「思考実験」を含めて，斜面の実験を発展させた実験をアニメーション化した教材を紹介する。

２．１　ガリレオ・ガリレイの斜面の実験の概要

ガリレオ・ガリレイは，初速度０で落下する，つまり“自由落下”する物体が時間的にどのように振る舞うかを，実験室において詳細に観察するため，歴史上有名な「斜面の実験」[1-5]

を行った。すなわち，当時の測定技術では，自由落下運動の動きが速過ぎて時間と落下距離の関係を正確に測定することが困難であったため，以下の説明からわかるように，斜面を利用した実験が「落下の法則」の直接的検証を可能にしたのである。

（1）時間の測り方

ガリレオの時代には，ストップウォッチはもちろんなかったが，実は秒単位はおろか分単位でも正確に時間を刻む機械式時計もなかったのである。ちなみに，科学的利用が可能になるまでには，早くとも，ガリレオの「振り子の等時性」を利用した機械式振り子時計（1656）およびヒゲゼンマイ付きテンプ時計（1675）を発明したクリスチャン・ホイヘンス（Christiaan Huygens, 1629-1695，オランダ）の出現を待たなければならなかった[6]。

結局，17世紀初頭では，脈拍で時間を計るか，水時計を使うかしか，他に良い方法はなかったのである。そこで，ガリレオは，工夫次第で正確に時間を測れる水時計を使った。それは，運動の経過時間を測定するとき，その間水をためた大きな桶からその底に付けた細い管を通って流出した水の重量を正確な天秤で測った値を経過時間として扱うという仕組みであった[5]。

（2）斜面の概要と工夫

ガリレオは，水時計の計時能力と人間の肉眼の運動体追跡能力を念頭に置き，垂直に落下する物体を観測する代わりに，傾きの“ゆるやかな”斜面（板）上に彫った直線状の溝に沿って転げ落ちる“真鍮製のボール”を観測した。斜面の溝の面は，摩擦を減らすため“滑らか”になるよう工夫されていた。さらに，最高の球形に作られたボールの球面は滑らかに磨かれていた。

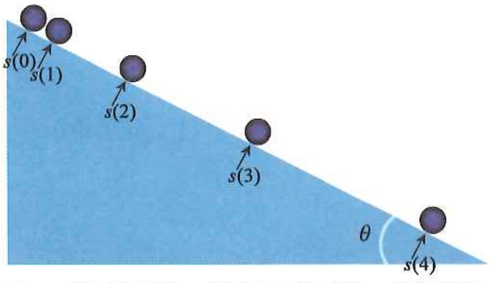


図1　斜面の実験　斜面上を初速度0で転げ落ちるボールが加速される様子を表す。

図1において斜面の傾きθを小さい値（描画の都合上やや大きいが，実際の実験ではθ=1.7°であった[5]）に設定すれば，ボールは“ゆっくり”転げ落ちるので，斜面の溝との間の摩擦も空気抵抗も殆ど無視できる。結局彼は，肉眼によるボールの動きの追跡を可能にした上，真の運動を隠している摩擦や空気抵抗を取り除いたのである。

（3）斜面の実験

図1のような斜面において，ボールが出発点$s(0)$から“初速度0”で転げ始めた瞬間（t=0）から，時間t（=1,2,3,4,…，単位は任意）経過したときのボールの通過点を$s(t)$（単位は任意）とする。

表1　斜面の実験の測定結果

経過時間t	隣接通過点間の距離		通過点$s(t)$	
0			出発点 $s(0)$	0
1	$s(1)$-$s(0)$	1	$s(1)$	1
2	$s(2)$-$s(1)$	3	$s(2)$	4
3	$s(3)$-$s(2)$	5	$s(3)$	9
4	$s(4)$-$s(3)$	7	$s(4)$	16
・	・	・	・	・
・	・	・	・	・
・	・	・	・	・

ガリレオは，**表1**のような実験結果を得た（1604)。隣接する通過点間の距離（間隔）は，時間が“1単位”経過する毎に1から始まる奇数値1,3,5,7,…を示している[1-5]。これらのデータを**表1**右端の欄のように加工すれば，実験式 $s(t) = t^2$ を得るが，時間と距離の単位が“任意”であるから，以後，比例係数（定数）k を入れて一般化した式 $s(t) = kt^2$ を用いる。

2．2　斜面の実験を発展させた実験のアニメーション

ここでは，ガリレオ・ガリレイが斜面の実験を発展させた実験[1-5]および「慣性」の概念の発見に辿り着いた「思考実験」[1-5]について学習するための手作りアニメーション教材を紹介する。

（1）<u>斜面の実験を発展させた実験1</u>

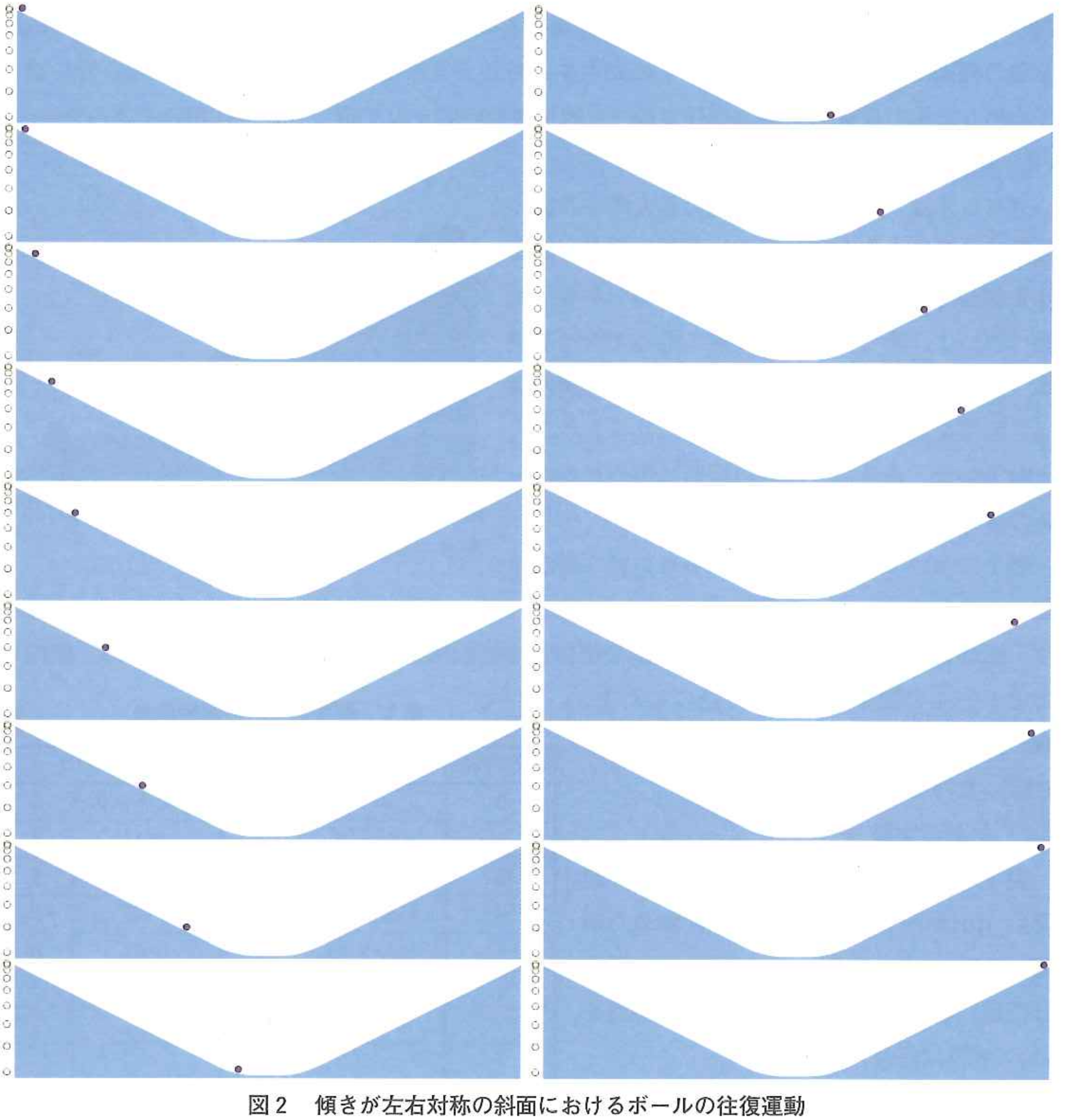


図2　傾きが左右対称の斜面におけるボールの往復運動

ガリレイは，もう１つの斜面（図２の右の斜面）を最初の斜面（図１の斜面→図２の左の斜面）と左右対称に組み合わせ，左の斜面のある出発点から初速度０で転げ落ちるボールが加速されて谷間の底を突いてからどのように振る舞うかを観察した。その後ボールは，右側の“同じ傾きの斜面”を駆け登り，減速されながら(左の斜面の)出発点と同じ高さまで登り詰め，そこで一瞬停止後反転し，今までの走行過程を逆走した。この様子をシミュレートするアニメーションを作り，図２にその典型的なコマをいくつか，左上→左下→右上→右下の順に示した。

（２）<u>斜面の実験を発展させた実験２</u>

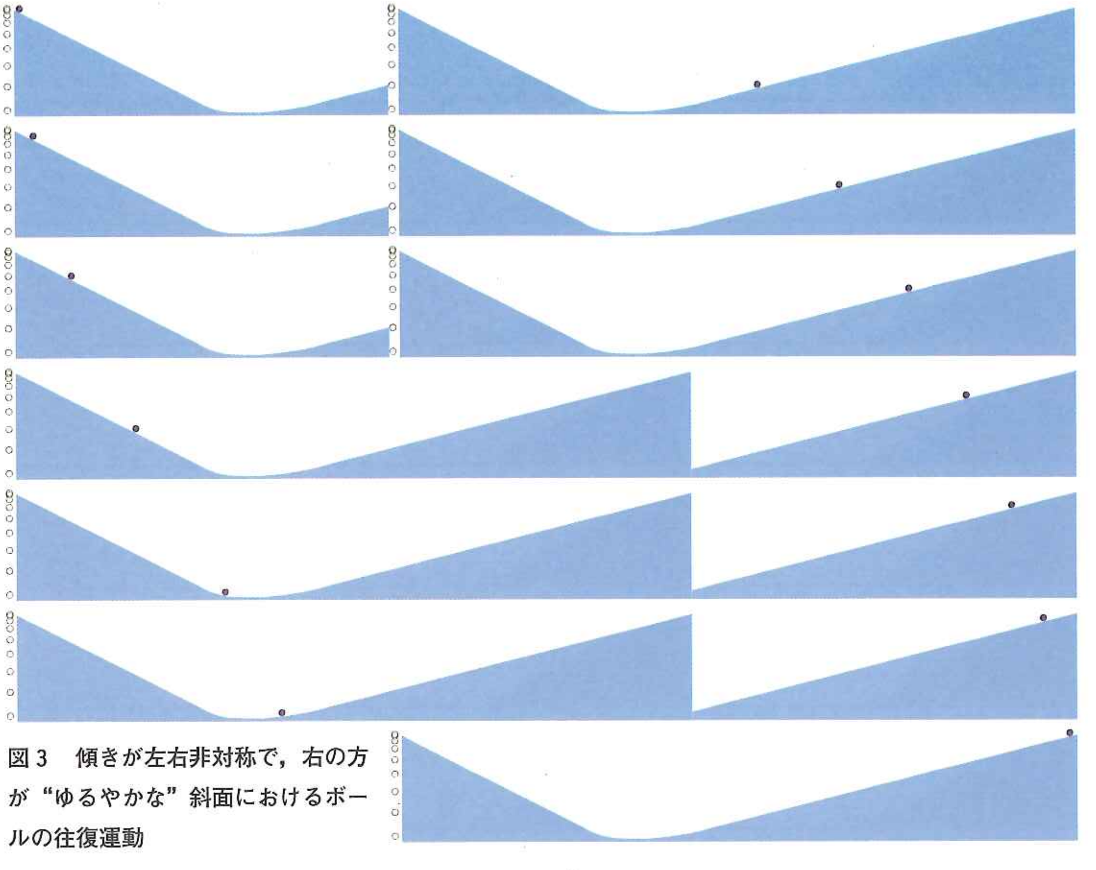


図３　傾きが左右非対称で，右の方が“ゆるやかな”斜面におけるボールの往復運動

先の実験（図２）において右の斜面の傾きを“もっとゆるやか”に設定した状況（図３）で，左の斜面の出発点から初速度０で転げ落ちるボールが加速されて谷間の底を突いてからどのように振る舞うかを観察した。その後ボールは，右側の“もっとゆるやか”な斜面を駆け登り，ゆっくりと減速されながら（左の斜面の）出発点と同じ高さまで登り詰め，そこで一瞬停止後反転し，今までの走行過程を逆走した。この様子をシミュレートするアニメーションを作り，図３にその典型的なコマをいくつか，左上→左下→右上→右下の順に示した。

（3）斜面の実験を発展させた実験3

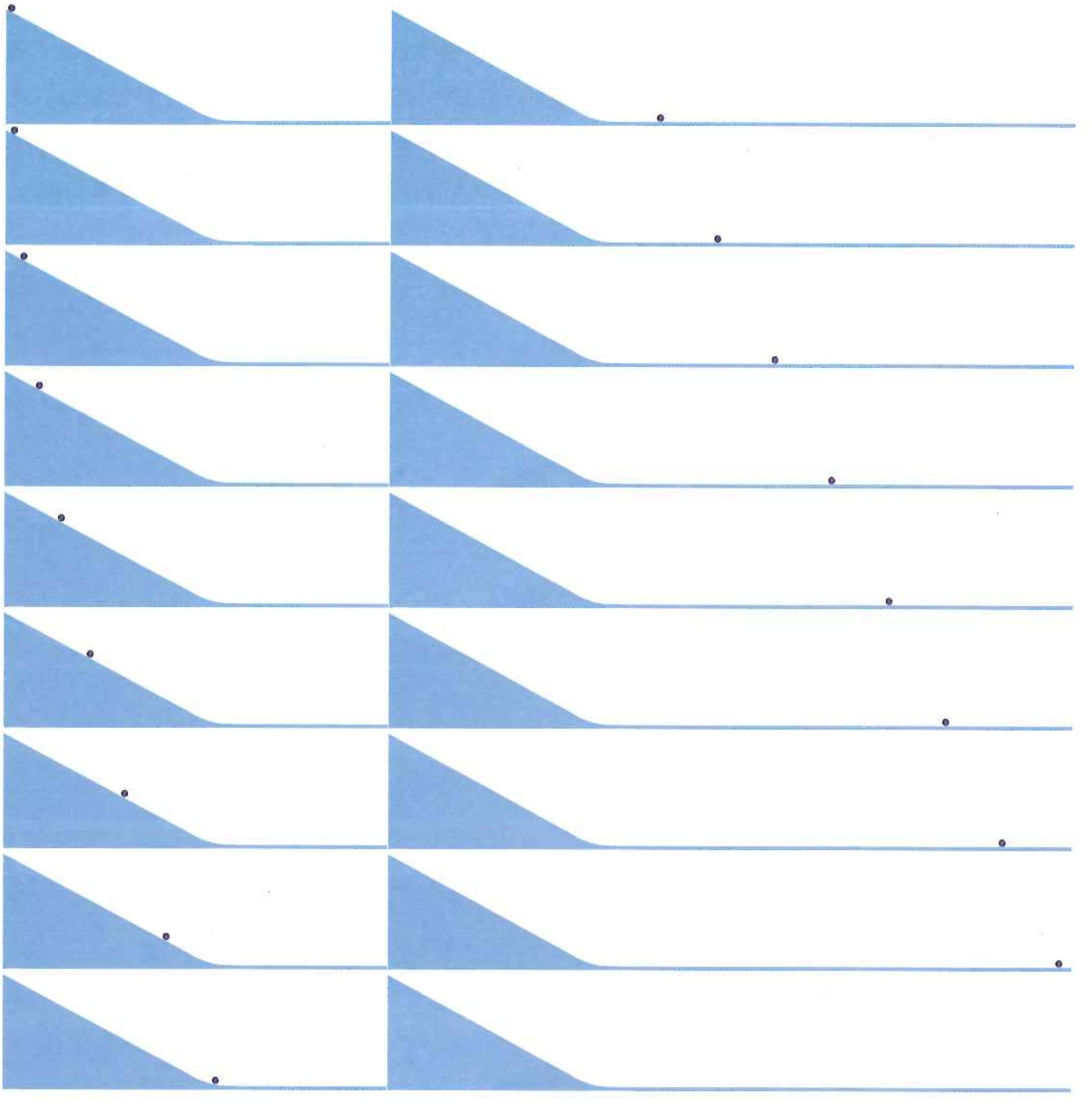


図4　斜面で加速され着地した後等速で転がり続けるボールの「慣性」運動　ガリレオは，このような実験を行ったが，地面上に無限に続く滑らかな面を用意し，その上をボールが同じ速さで永久に転がり続けることを確認することはできなかった。このような実験を，いかに滑らかなボールと面を使って相当長い距離で行ったとしても，いずれボールは地面との摩擦と空気抵抗により徐々に減速され遂には停止したはずである。このような場合「思考実験」がその威力を発揮した訳である。それをアニメーション化したものが**図5a**と**図5b**である。

先の実験（図3）において右の斜面の傾きを限りなく水平に近付けていった場合，つまり，左の斜面の出発点から初速度0で転げ落ちるボールが加速されて谷間の底を突いてから右方に

延びる水平面（図４）上をどのように転がって行くかを観察した。左の斜面で加速されたボールは，その後右方の水平面上を同じ速さで転がり続ける。この様子をシミュレートするアニメーションを作り，図４にその典型的なコマをいくつか，左上→左下→右上→右下の順に示した。

（４）斜面の実験を発展させた実験４（思考実験）

上の実験（図４）においては，左の斜面で加速されたボールが谷間の底を突いてから右方に延びている水平面上を同じ速さで転がり続ける様子を観察した。実験室内の水平面は有限の長さであるが，この水平面が実験室を越えたずっと先は，地球の表面に沿ってゆるやかにカーブしているはずである，と誰でも自然に空想してしまうであろう。

そこで，このような空想（imagination）をシミュレートする地球規模のアニメーションを作り，図５ａと図５ｂにその典型的なコマやボールの軌跡などをいくつか示した。

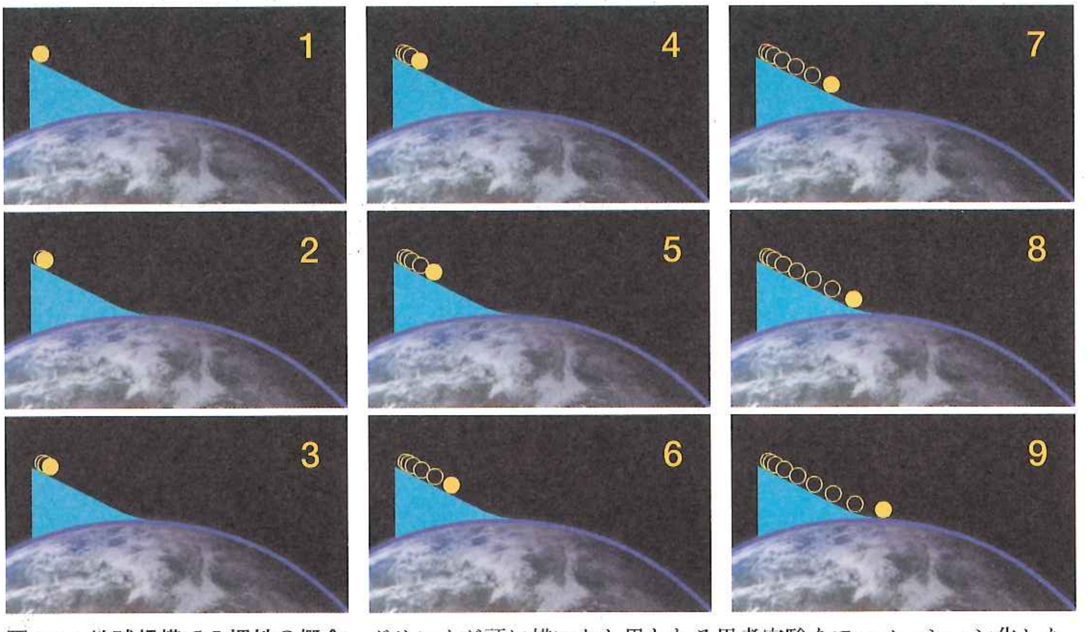
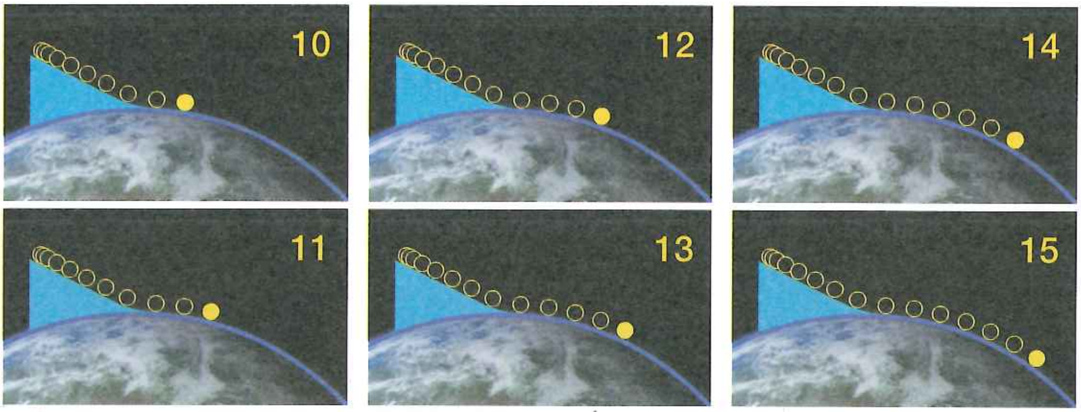


図５ａ　地球規模での慣性の概念　ガリレオが頭に描いたと思われる思考実験をアニメーション化した。斜面を落下加速中のボール●の各瞬間の９コマ（時間はNo.１～９の順）を部分的に示した。もちろん，思考実験では，ボールと地面の摩擦や空気抵抗はないものとしている。

図５ａからわかるように，地球の北極付近に置かれた斜面において，初速度０で転げ始めて加速され続けたボールは，着地後，右方に延びている地球表面（水平面）上を同じ速さで転がり続けるであろう。しかしながら，ボールが長距離転がり続けると，現実には地球表面が半径の大きい球形をしているため，その軌道は，地球表面に沿ってゆるやかにカーブしている巨大な円を描き，もはや直線とみなすことはできなくなる。そして，ボールが着地の瞬間の速さと同じ速さを保ちつつ永久に転がり続ける様子は，図５ｂの下の図のようにイメージされるであ

ろう。ただし，空気抵抗や摩擦抵抗を無視できるものと仮定しているのは言うまでもない。

このように，現実には（例えば，実験室では）不可能な実験を，頭脳の中で１つの極限としてモデル化し，公理・原理に基づく論理学的思考を行い，結論を引き出すのが，「思考実験」である。つまり，上述のようなガリレオの「思考実験」は，空気抵抗も摩擦抵抗もないという条件の下で地球規模の実験を可能にしたということになる。



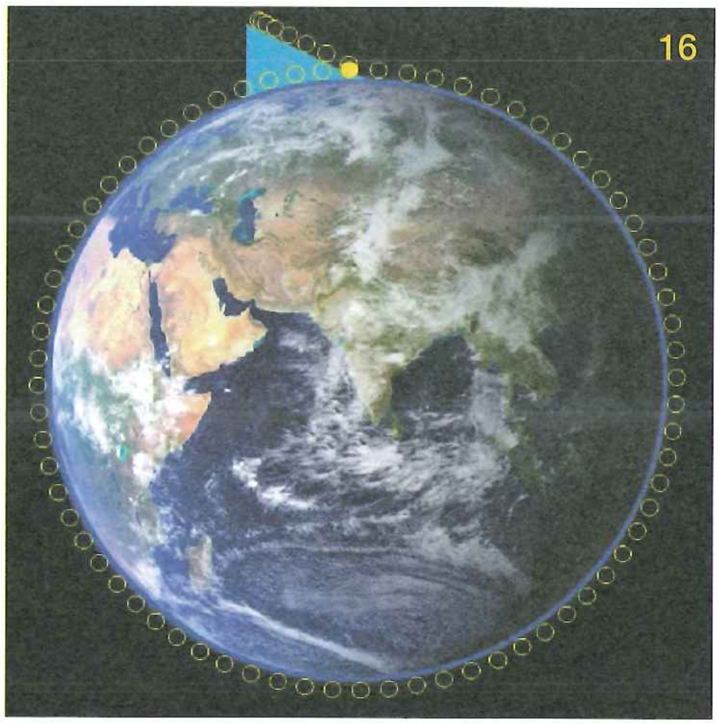


図５b　地球規模での慣性の概念
図５aに見たように，斜面で一様加速を受けて着地した後，地球表面（円軌道）に沿って一定の速さで転がり続けるボールの初期の各瞬間の６コマ(No.10～15の順)，および「円」慣性を示す軌跡を描いて地球を一周し，最初の着地点の一歩手前に迫り，まさに二周目に入らんとするボール●の瞬間の１コマ(No.16)である。なお，図５で用いた地球の写真は，NASAのWebページ；the Blue Marble のView of the Earth From Spaceの中の１つ：http://earthobservatory.nasa.gov/Newsroom/BlueMarble/Images/globe_east_540.jpgから転写した。

ガリレオは，このように思考して，「慣性」の概念を発見したと推定される。しかしながら，この「慣性」には，最初運動していた物体（ボール）は，“外力”が働かない限り，永久に等速直線運動を続けるという「慣性の法則」とは，本質的に違う点がある。それは，ガリレオの

「慣性」の概念の場合，地球表面に沿って同じ速さで転がり続けるボールが，地球表面（水平面）に垂直（鉛直）下向き，つまり地球の中心に向かって常に“重力”を受け続ける結果，そのボールの軌跡は地球表面に沿ってゆるやかにカーブする円軌道になるという点である。すなわち，ガリレオの「慣性」の概念の場合，“重力”という“外力”が作用しているという点である。この報告では以後，ガリレオの発見した，このような「慣性」の概念を，「円」慣性と呼ぶことにする。

3．ガリレオ・ガリレイの落下の法則と慣性の概念

この節では，まず「落下の法則」を着想した背景について，とくに振り子の実験との関係において考察する。次に，「落下の法則」が「斜面の実験」などによってどのように検証されたかを論じる。最後に，斜面の実験を発展させた「思考実験」で「慣性」の概念，つまり「円」慣性に辿り着いたガリレオがなぜ「慣性の法則」に辿り着けなかったかについて考察する。

3．1　落下の法則を着想した背景

（1）振り子の法則の実験的検証

ガリレオは，19才のピサ大学医学生のとき，ピサの斜塔のある寺院の大伽藍で天井から吊り下げられているランプが揺れているのを観察し，「振り子の等時性」を定式化する着想を得た（1583）と推定される[3)]。ガリレオの遺した研究ノートなどの記録によれば，パドヴァ大学教授時代の1602年頃から，斜面の実験と並行して，長い振り子の研究を始めていたという。長い振り子（の糸）の長さ，錘の重さ，振幅（最大の振れ幅）などを変化させて，振り子の周期（１往復に要する時間）を測定した。実際には，水時計による時間の測定技術の都合上，周期の1/4の精密測定を繰り返したとされる[5)]。ただし，振幅は小さい場合に限定された[7)]。

その結果，振り子の周期 T は，振り子の長さ l の平方根（２乗根）に比例するが，振り子の錘の重さと振幅には無関係であることを発見した[5)]（「振り子の等時性」または「振り子の法則」，1604）。数式で表すと，$T \propto \sqrt{l}$ である。また，これより関係式 $l \propto T^2$ を得る。

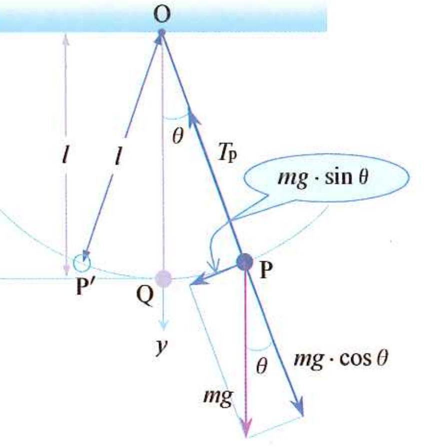


図６　振り子の力学的解析（参考）

長さ l の振り子の錘 P（質量 m）の運動を軌道に沿って定式化した運動方程式 $ml\mathrm{d}^2\theta(t)/\mathrm{d}t^2 = -mg\cdot\sin\theta$ は，θが小さいと仮定したときの近似式 $\sin\theta \approx \theta$ を用い，$\mathrm{d}^2\theta(t)/\mathrm{d}t^2 + \omega^2\theta = 0$ となる。ここに，角振動数 ω の定義は，$\omega^2 = g/l$ で，振り子の周期 T は，$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g}$ となる。ただし g は重力加速度であり，軌道に垂直な重力 mg の成分 $mg\cdot\cos\theta$ は，振り子の糸の張力 T_P と均衡している。

（２）振り子の実験による落下の法則の間接的検証

ガリレオは，遅くとも1602年頃から既に，自由落下する物体がどのような法則性に従って振る舞うかについて関心を持つようになっていた。彼は，たとえ「重力」ないし質量の概念には到達していなかったとしても，物体が鉛直下向きに加速度的に落下することを“自然的運動”としてよく理解していたはずである。

高い天井から吊り下げられた振り子は，本来鉛直下向きに落下するはずの錘が糸で引っ張られている（つまり，拘束されている）ので，本来の状態にあるときは鉛直下向きにぶら下がって静止しているはずであるのに，錘が本来の位置Ｑ（糸が鉛直になる最下点，図６を参照）からずれた適当な位置Ｐ（出発点）から振れ始めたとき，本来の位置に戻ろうとして“加速”されつつ弧を描くが，慣性で本来の位置（振れる錘が最速となる最下点Ｑ）を通過後“減速”されつつ弧を描き，反対側の“出発点Ｐと同じ高さ”の位置Ｐ′で一瞬停止後反転し，同じ弧を逆走し，出発点Ｐに戻って一瞬停止後反転し…というように，空気抵抗等が無視できれば，同じ触れ幅（振幅）で同じ過程を永久に繰り返す，と考えたであろう。

このように，ガリレオは，振り子の運動も，物体が鉛直下向きに加速度的に落下する“自然的現象”（ニュートン以後の万有引力，つまり重力の概念を用いて表せば，重力による“自由落下現象”であることに注意！）と本質的に同じであると考えていたはずである。そして振り子の実験から帰納した関係式 $l \propto T^2$（長さが時間の２乗に比例している事実）との“アナロジー”から，物体が自由落下する距離も落下に要する時間の２乗に比例するであろうという予見を抱いたためか，長い振り子（の糸）の長さ l に等しくなるように合わせた距離 l を物体が自由落下するのに要する時間 τ を，l を変化させつつ繰り返し測定することによって，自由落下する物体の重さに関係なくおよそ関係式 $l \propto \tau^2$ が成立すること，つまり「落下の法則」の原型を発見していたと推定される[8)]。

ところで，ガリレオは彼の遺した研究ノートにおいて，［長さ l の振り子の錘Ｐが初速度０で振れ始め弧PQに沿って加速されて最下点Ｑに到達するに要する時間，つまり振り子の周期 T の1/4 ］$=T/4$ と［同じ振り子の長さに等しい距離 l を鉛直下向きに物体が自由落下するのに要する時間］$=\tau$ との比 $(T/4)/\tau$ が，942/850（ガリレオは“比”を使っても小数を使わなかった！）となるという実験データを記録している[5)]。これは，ガリレオがパドヴァにおいて振り子の実験と落下の実験を並行して繰り返し行って得た結果である。しかも，振り子の錘（同時に自由落下する物体としても使われたもの）の重さや振り子の長さ l（これに等しい自由落下距離）に関係のない普遍定数なのである。

この普遍定数がどのように「振り子の法則」と「落下の法則」を関係付けるのか考えるため，ガリレオが考えたと推定される[5)]こと【Ａ】，ニュートン力学による解析【Ｂ】，および参考までに，もっと解りやすく理解するための考察【Ｃ】について，それぞれ詳しく述べてみる：

【A】まず，長さ l の振り子の実験から帰納した「振り子の法則 」：$l \propto T^2$を“確立された法則”として $l = G(T/4)^2$（Gは比例係数）と表す。次に，自由落下する距離が落下時間の 2 乗に比例するという「落下の法則」：$l \propto \tau^2$は，“仮説”として $l = k'\tau^2$（k' は比例係数）と表す。上記の比$(T/4)/\tau$ が測定値942 / 850[5]に等しいから，普遍定数$(T/4)/\tau = \sqrt{k'/G} = 942/850$を得る（この値を計算すると$942/850 = 1.108 \approx 1.11$となる）。

【B】ニュートン力学によれば，まず，長さ l の振り子の周期 T の1/4は，$T = 2\pi\sqrt{l/g}$（図 6 を参照）より，$T/4 = (\pi/2)\sqrt{l/g}$である。次に，同じ振り子の長さに等しい鉛直距離 l を自由落下するのに要する時間 τ は，$l = (g/2)\tau^2$より，$\tau = \sqrt{2l/g}$で与えられる。両者の比を計算すると，普遍定数$(T/4)/\tau = \pi/2\sqrt{2}$を得る（この値を計算すると$\pi/2\sqrt{2} = 1.1107 \approx 1.11$となる)。

【C】ガリレオの普遍定数の意味を理解するため，図 7 を参考にしながら，長さ l の振り子の錘 P が初速度 0 で振れ始め“弧PQ”に沿って加速されて最下点 Q に到達する運動（に要する時間$T/4$）とボールが斜面 PQ（“弦PQ”）上を出発点 P から初速度 0 で転げ始め一様に加速されて最下点 Q に到達する運動（に要する時間 τ'）を比較する。

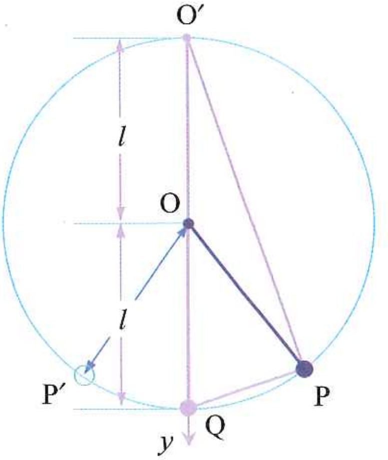


図 7　振り子の実験と落下の法則

そこで，ニュートン力学を用いて$(T/4)/\tau'$を求めてみよう。まず，「振り子の法則」から$T/4 = (\pi/2)\sqrt{l/g}$であった。一方，ガリレオが求めた「弦の法則」[9] からもわかるように，“ボールが斜面 PQ 上を転げ落ちるのに要する時間 τ' は，鉛直下向きの直線 O′Q に沿って O′ から Q までの距離 $2l$ を自由落下するのに要する時間 τ' に等しい”から，「落下の法則」：$2l = (g/2)\tau'^2$より，$\tau' = \sqrt{4l/g} = \sqrt{2}\cdot\tau$で与えられる。ただし，$\tau = \sqrt{2l/g}$である。結局，$T/4$ と τ' の比をとって計算すると，新しい普遍定数$(T/4)/\tau' = (1/\sqrt{2})(T/4)/\tau = \pi/4$を得る。これは，長さ l の糸に拘束された錘が“弧 PQ”(半径 l の円周の一部)に沿って運動するのに要する時間 $T/4$ が，ボールが“弦 PQ”という斜面上に拘束されて運動するのに要する時間 τ' の $\pi/4 (\approx 0.7854)$倍であることを意味する。つまり，同じ重力を受けた拘束運動（constrained motion）でも，P から Q までの拘束軌道（弧と弦）が異なれば，P から Q までの所要時間も異なり，“弧 PQ”に沿った運動が“弦 PQ”に沿った運動より $4/\pi (\approx 1.2732)$倍速いことがわかる。

もしも，ガリレオがこのような視点から考察をしていたとすれば，前ページ中頃において紹介した実験のように振り子の長さ l に自由落下の距離を合わせる方法をとらずに，振り子の 2 倍の長さ $2l$（図 7 を参照）に自由落下の距離を合わせる方法を取っていたかも知れない。

さて，【A】と【B】の結果を比較すると，ガリレオが見通しを付けて手堅い実験を行って得

た普遍定数942/850の値が，1.11と有効数字3桁の精度で，ニュートン力学を用いて求めた普遍定数 $\pi/2\sqrt{2}$ の値に一致していることが判る。さらに，2つの関係式 $G=4g/\pi^2$ と $k'=g/2$ が成立するから，2つの比例係数 G と k' は，共に重力加速度 g に比例する定数であることが判る。これらのことより，仮説としていた「落下の法則」が，間接的に検証されたことがわかる。

このような事実を通して，400年昔「落下の法則」が成立することを確信して実験を繰り返したガリレオの強固な意志が現代の我々にひしひしと伝わってくるような気がする。余談であるが，重力の概念ないし重力加速度 g が未発見であった時代にあって，このように精度の高い普遍定数を発見できたガリレオ・ガリレイが，いかに傑出した物理学者であったか，よくわかるであろう。

3．2　落下の法則の証明

（1）<u>斜面の実験の力学的解析</u>

図8からわかるように，ニュートン力学を使えば，斜面に沿った，ボールの時刻 t における位置座標 $s(t)$ は，初歩的な計算で $s(t)=(g/2)t^2\cdot\sin\theta$ と求められる。また時刻 t における速さ $v(t)$ も，運動方程式を積分して解く過程において得られる $ds(t)/dt=gt\cdot\sin\theta$ で与えられることがわかる。もちろん，鉛直方向の自由落下の場合（$\theta=90°$），鉛直下向きに $y(t=0)$ を原点とする y 軸を取れば，解が $y(t)=(g/2)t^2$，速さが $u(t)=dy(t)/dt=gt$ となることも簡単に示せる。これは，取りも直さず，ガリレオの「落下の法則」である。

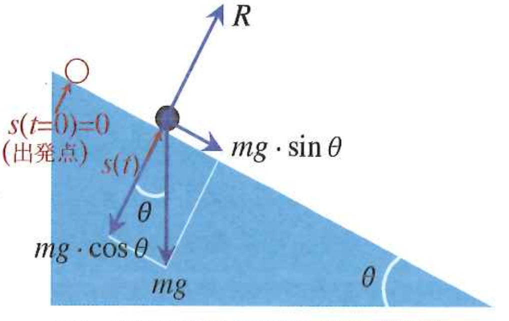


図8　斜面の実験の力学的解析（参考）
斜面に沿う重力 mg の成分 $mg\cdot\sin\theta$ によるボールの運動方程式は，$md^2s(t)/dt^2=mg\cdot\sin\theta$ となる。ただし，斜面に垂直な重力 mg の成分 $mg\cdot\cos\theta$ は，斜面の抗力 R と均衡し，ボールの運動に影響を与えない。

（2）<u>ガリレオ・ガリレイの仮説演繹法</u>

仮説（数学で記述）を設定しその仮説から導かれる帰結を証明する実験を行い，元の仮説を検証しようとする過程を「仮説演繹法」と呼ぶ。今日の科学理論も同様の過程を経て確立されていると考えられる。ここに仮説とは，ある現象を統一的に説明できるように仮に設定された理論（通常数式）のことである。ただし，17世紀初頭まだ解析学（微積分学）が生まれておらず，数学はすなわち幾何学であった。

さてここでは，ガリレオの「仮説演繹法」について，「落下の法則」ないし“一様加速運動”との関係において考えてみよう。以下で，従来の説の1つ【A】[10)]，およびスティルマン・ドレイクの説【B】[5)] を紹介するが，【B】の方が史実に近いようである：

【A】数学を用いた「仮説演繹法」の元祖とされるガリレオは，鉛直下向きに自由落下する物体が出発点から距離 $y(t)$ の地点を通過する瞬間までの経過時間を測ったら t であったとするとき，物体の速さが $u(t) = K't$（K' は比例係数，この式は自由落下が一様な加速運動であることを意味する）で表されるという“仮説”を立てた。この仮説を直接検証することは当時の技術では困難であったため，この仮説から導かれる関係式 $y(t) = [(0+u)/2]t = K't^2/2$ を検証する方法を選んだ。この検証は，第２節の２．１の（３）で説明した「斜面の実験」結果に３．２の（３）の考察を加えて証明される公式 $y(t) = K't^2/2$ を得て完了する。その結果，仮説 $u(t) = K't$ の正しいことが証明されたという論法である。ただし，$k' = K'/2$ の関係がある。

【B】1604年頃「斜面の実験」を行い，斜面に沿った関係式 $s(t) = kt^2$ に気付いていたガリレオは，３．１の（２）で説明した普遍定数942/850[5]を測定して，鉛直下向きの自由落下の関係式 $y(t) = k't^2$（kとk'の関係は３．２の（３）の考察より$k/k' = \sin\theta \leq 1$）も成立することを確信していたが，自由落下の速さ u が落下距離 y に比例する（$u \propto y$）という誤った考えをもっていた（1604）。ガリレオの遺した研究ノートを調査研究したスティルマン・ドレイクによれば，正しい関係 $u(t) = K't$（K'は比例係数）を示す記録が顕われたのは1608年頃であるという[5]。この関係がまだ“仮説”であったとしたとき，それが正しいと判断できる根拠は，この仮説から導かれる関係式 $y(t) = K't^2/2$ が既に実験的に検証されていた（1604）という事実である。これが史実に近く，“仮説”の提唱と“仮説演繹”結果の検証が，【A】の場合と比べて時間的に前後しているが，【A】の「仮説演繹法」と“本質的には”同様の論法であると言えよう。

（３）<u>斜面の実験から落下の法則へ</u>

さて，ガリレオの時代には，速度や加速度の概念はあったが，まだ重力や万有引力などの力の概念も質量の概念もなく，ニュートン力学（「万有引力の法則」と「運動の３法則」）もなかった。従って，上記３．２の（１）のような力学的解析もできなかった。

それにもかかわらず，ガリレオは，「斜面の実験」によって検証された関係式 $s(t) = kt^2$ から，垂直方向の本来の「落下の法則」を正しく導いている。すなわち，斜面の傾き θ を限りなく90°に近付けても，同じ関係式 $y(t) = k't^2$ が成立しなければならないと結論した。今日の表現を使えば，極限 $\theta \to 90°$（$\sin\theta \to 1$, i.e. $k \to k'$）において，$s(t) \to y(t)$，つまり $s(t)$ が $y(t)$ に収束するということである（図8を参照）。

そしてガリレオは，２つの比例係数の間には，関係式 k/k'=（垂直成分の高さ）/（斜面［斜辺］の長さ）$= \sin\theta$（$\sin\theta \leq 1$, i.e. $k \leq k'$）があることを知っていた。重力加速度 g は未発見であったから，さすがに比例係数は，$k = (g/2) \cdot \sin\theta$ または $k' = g/2$ の形ではなかったと思われるが，k/k' の値はもちろんのこと，k または k' の値を実験データから計算できたはずである。ただし，長さの単位も時間の単位も当時の単位が使われていたことから，kとk' の絶対値が今日の値と同じでないのは言うまでもない。

なおここで，「落下の法則」が物体（ボール）の重さに無関係に成立すること，および関係

式 $s(t) = kt^2$ が物体の重さ（m）を全く含んでいないことが，ガリレオの「斜面の実験」の過程で確認されていることを指摘しておきたい。もちろん，このことは，3．2の（1）においてニュートン力学を用いて求めた公式 $s(t) = (g/2)t^2 \cdot \sin\theta$ からも自明である。

（4）思考実験によるアリストテレスの落体論の打破

アリストテレスの落体論によれば，自由落下，つまり初速度0で落下する物体は，重いものの方が軽いものより速く落ちるという。

ガリレオは，自由落下する物体が，その重さの大小に関係なく同じ“一様な”加速度で落下するという「落下の法則」の（落下距離と落下時間の関係 $y(t) \propto t^2$ を除く）重要な一側面を証明する「思考実験」を行い，その主張の正しいことを示した。その内容を次に紹介する[2,3]：

さて，自由落下する2つの重い物体Aと軽い物体Bがあるとする。

今「重い物体Aが軽い物体Bより速く落ちる」という仮定が正しいとした場合，これら2つの物体を連結して落としたらどうなるか，について考えてみよう。

◎ 連結した2物体は，一体としてみると，各々単独のAとBのどちらよりも重いから，どちらよりも速く落ちなければならない。

◎ 一方見方を変えると，連結された物体のうち，重い物体Aが速く落ちようとしても，軽い物体Bが遅く落ちようとするため，連結された物体は，各成分AとBの中間の速さで落ちなければならない。

上記2つの見方は，互いに矛盾する結果を与える。故に，上記の仮定は正しくないと断定できる。

すなわち，「重い物体も軽い物体も同じ速さで落ちる」，あるいは一般化して「全ての物体はその重さの大小に関係なく同じ速さで落ちる」という結論を得る。

また，ガリレオは，実際に約100mの高所から重さの違う鉛の球と樫の球を同時に自由落下させたら鉛の球の方がわずかに1mほど先行して着地しただけであること，さらに鉛の球と石ころを同時に自由落下させたら両者がほぼ同時に着地することを観測したという[2,3]。このような直接的な方法でも，「落下の法則」の重要な一側面を検証できたという訳である。彼は，真の運動を隠している空気抵抗がなければ，両者は同時に着地したに違いないと考えたことであろう。

3．3　ガリレオが「円」慣性を超えて慣性の法則に辿り着けなかった理由

（1）ガリレオの生きた時代背景

恒星天（恒星からなる天球）内に閉じ込められた有限宇宙と天動説に特徴付けられるアリス

トテレスの宇宙体系がキリスト教の教義と合体して出来上がったプトレマイオス（Ptolemaios Klaudios, 85頃-165頃）の宇宙体系（天動説：地球を中心に回る月・水星・金星・太陽・火星・木星・土星と不動の恒星天）は，16世紀の中頃コペルニクス（Nicolaus Copernicus, 1473-1543，ポーランド）の宇宙体系（恒星天を温存した地動説，1543，コペルニクスの死の年）が世に出てからも，無限宇宙を唱え普及させてキリスト教の教義に挑戦したジョルダーノ・ブルーノ（Giordano Bruno, 1548-1600，イタリア）をローマで火刑に葬り去り（1600），地動説に固執する晩年のガリレオ・ガリレイをローマで異端審問（1616，第1次裁判；1633，第2次裁判：ガリレオ69才のとき）にかけた挙げ句その余生をフィレンツェ郊外の自宅に幽閉する（1633-1642）などして，およそ1世紀近くの長きにわたりその猛威を振るった[11)]。

このような時代にあっては，近代科学の土台を築いた叡智の人 ガリレオといえども，自らがどっぷりつかる文明から自分の頭脳の隅々までを独立させることはできなかったようである。

（2）慣性の法則に辿り着けなかった理由

既に，第2節の2．2の（4）で述べたように，ガリレオは「斜面の実験」を発展させた「思考実験」によって「慣性」の概念に辿り着いたが，それは「円」慣性であった。

ガリレオが「円」慣性を超えて「慣性の法則」に辿り着けなかった理由としては，次の【A】と【B】が考えられるが，どちらの説にも信憑性があるものと推定される[3,4,12)]：

【A】“自然的運動”は「円」であるとするアリストテレス的自然観にまだ疑問を感じていなかったからか，ボールが転げる地球表面（球形の水平面）に垂直（鉛直）下向きに働く重力の概念を知らなかった（従って重力を取り除こうと考えることもなかった）からか，「円」慣性に何ら疑念を挟まなかったものと推定される。

【B】地動説を擁護し，惑星や恒星を望遠鏡で観測して，恒星が太陽と同様自ら光を放つ星であり，恒星天という“天球”に閉じ込められてはおらず，地球から恒星までの距離が様々であることに気付き始めていたとしても，まだ無限宇宙を信じるに足る確かな証拠を見つけることができなかったので，宇宙の無限の彼方まで延びている「直線」上をボールが等速で永久に転がり続けるという「思考実験」を着想できなかったのではなかろうか。

しかしながら，いずれにしても，ガリレオによって「円」慣性が発見されたからこそ，デカルトによってこれから地球の重力が取り除かれ，正しい「慣性の法則」に発展させられたのである[12)]。これがニュートンによって「運動の第1法則」として受け継がれ，立派に近代力学の中に生き残った，と言うよりもむしろ，積極的に近代力学の基礎を確立するための土台となった。これがなかったら，たとえニュートンの「万有引力の法則」が発見されていたとしても，「運動の第2法則」の誕生，ひいては近代力学の確立も“しばし”遅れていたかも知れない，と言っても過言ではない。

4．おわりに

かくして，16世紀末から17世紀前半にかけて活躍したガリレオは，ケプラーと共に，ニュートンによる近代力学構築に不可欠の土台を作った。晩年になり自らの主な業績を２大著書『天文対話』（1632）と『新科学対話』（1638）に発表した。『天文対話』は，主にコペルニクスの地動説擁護の書であり，天動説の側に立つ教会の権威に挑戦する書であった。『新科学対話』は，本報告で取り扱っている振り子の実験，「斜面の実験」，「思考実験」，それらの帰結としての「振り子の等時性（振り子の法則）」，「落下の法則」，「慣性」の概念[13)]などを含む数々の業績を発表し，近代科学史上重要な影響を及ぼした名著である。

ガリレオは，『新科学対話』において，アリストテレスの落体論を批判し，第３節の３．２の（４）で紹介したような「思考実験」，その他様々な実験の様子などを述べている。これは，空気抵抗のない真空中ではすべての物体が同じ速さで自由落下することを証明して，真空を認めないアリストテレスの哲学を批判する意図が根底にあったものと推定される。

さらに，ガリレオは，振り子の実験，「斜面の実験」，および斜面の実験を発展させた「思考実験」から得られた「落下の法則」および「慣性」の概念に基づいて「放物運動」を考察し，水平方向に投げられた物体の軌跡は，水平方向の等速「慣性」運動と，「落下の法則」に従う等加速“自由落下”運動とを合成した“放物線”運動であると結論した。

ガリレオの偉大さは，上述のような運動論的業績もさることながら，彼の始めた研究の方法論にあると言われる。なかんずく，「落下の法則」を検証するに当たり「仮説演繹法」を活用したことであり，しかも，仮説も法則も「数学（幾何学）」を用いて表したことにある。この根底には，数学こそが，自然そのものの中に潜む，あるいは隠されている法則性を記述する最高の言葉である，というガリレオの信念があったと考えられる。

最後に，ガリレオ・ガリレイの業績で忘れてはならないのは，「ガリレイの相対性原理」の発見である。これに関連して，著書『天文対話』の中で地動説を擁護する人物が，「走行中の船のマストから自由落下した物体はマストの後方に落ちる」という，地球自転を否定する天動説論者の主張に反論し，「走行中の船のマストから自由落下した物体はマストの真下に落ちる」と主張し，高所から自由落下した物体が真下に落ちることが地球の自転を否定する根拠とはならないことを納得させようとする場面がある[1,3,13)]。このような話が，どのように「ガリレイの相対性原理」の発見につながったかをシミュレートするアニメーション教材の製作について，他の機会に報告することとしたい。

謝　辞

本報告は，本学情報処理研究センターの2004年度研究プロジェクトの一環として，研究テーマ「ニュートン力学揺籃期における実証実験等の“再体験”シミュレーション教材の開発」の下で，同センターから補助金を得て実施した研究の成果報告の一部である。ここに，その謝意を表明する。

参考文献

1）ガリレオ・ガリレイ著，青木靖三訳：**天文対話（上・下）**，岩波文庫（1959）。

2）ガリレオ・ガリレイ著，今野武雄，日田節次共訳：**新科学対話（上・下）**，岩波文庫（1948）。

3）朝永振一郎：**物理学とは何だろうか（上）**，岩波新書，pp.58-86（1985）。

4）N.スピールバーグ，B.D.アンダソン共著，小野 周訳：**物理学七つの革命**，森北出版，pp.69-78（1990）。

5）スティルマン・ドレイク著，赤木昭夫訳：**ガリレオの思考をたどる**，産業図書，pp.10-37（1993）。

6）子供向けWebサイト「ときをまなぼう」（http://www.kodomo-seiko.com/）のページ「時の歴史」：http://www.kodomo-seiko.com/classroom/class/rekishi/rekishi0009.html。ただし，このWebページの記事は，**玉川こども百科89　時計**，玉川大学出版部（誠文堂新光社）を参考に書かれたものである。

7）ガリレオの遺した研究ノートを調査研究したスティルマン・ドレイクは，ガリレオが，振幅が大きくなると振り子の等時性が破れる（**図6**の説明文を参照）ことに気付いていたと，その著書：参考文献5）**ガリレオの思考をたどる**のp.27において指摘している。従って，ガリレオは，振幅があまり大きくならないように注意しながら，慎重に測定を行ったものと推定される。なお，振幅の大きい場合には，$\sin\theta \approx \theta$という近似式が成立しないので，振り子の運動方程式を，**図6**の説明文におけるような単振子の微分方程式に近似できなくなる。厳密な運動方程式から振り子の周期を求めるには，楕円積分を用いる必要がある。この具体的な解法については，Webサイト「物理のかぎしっぽ」（20人余りの大学生・大学院生等が編集・開設しているHP：http://www12.plala.or.jp/ksp/index.html）の項目「物理数学」内のページ「楕円積分～振り子の周期を求める」：http://www12.plala.or.jp/ksp/mathInPhys/elliptical/index.html に詳しい解説がある。

8）一方ガリレオは，幾何学的論証によっても，物体の自由落下距離は時間の2乗に比例することを，当時既に（1604年頃までには）導いていた可能性があるかも知れない。ただし，これは可能性の推測の域を出ず，その詳細については，吉仲正和：**力学はいかにして創られたか**，玉川大学出版部，pp.121-126（1988），およびそこに紹介されている参考文献を参照されたい。

9）新潟大学教育学部角田サーバー（http://kakuda.ed.niigata-u.ac.jp/）のページ「振り子の法則の発見経緯」：http://kakuda.ed.niigata-u.ac.jp/semi/ob/thesis/2000saegusa_thesis/galileo/rakutai02.html。

10）安孫子誠也：**歴史をたどる物理学**，東京教学社，pp.25-27（1992）。

11）青木靖三：**ガリレオ・ガリレイ**，岩波新書（1971）。

12）広重　徹：**物理学史Ⅰ**，培風館，pp.61-65（1972）。

13）ガリレオは，『天文対話』においても，登場人物に慣性問答を行わせて「慣性」の概念を提唱し，高所から自由落下した重い物体が鉛直真下に落ちる事実が，地球が不動であるとするアリストテレス派の論拠にはならないことを論じた。すなわち，物体は「慣性」を持っているため，地球が自転していても，重い物体が鉛直真下に落ちることに変わりはないと主張した。

（2005年3月11日受理）