Excel VBA によるゲーム理論の基本的計算のための ツール製作の試み

青 木 博 明

Trial Production of a Tool for Fundamental Game Theory Calculation by Excel VBA

Hiroaki AOKI

1. はじめに

筆者は，ゲーム理論の基礎的な計算を行うツールをExcelのVBA (Visual Basic for Applications)によって作成した。本稿では，その機能，操作方法を示す。それに先立って，まずこのツール作成の意義を述べ，また最後にこのツールの計算結果から得られた所見を述べる。なお，この所見は理論的に得られた命題ではなく，繰り返しツールで計算することで得られた予想ともいうべきものである。

ゲーム理論は，プレイヤーの戦略と利得を示す利得表を中心に理論と計算が展開されるが，その利得表は矩形である。他方，Excelはデータを矩形の表形式でもち，そのVBAはExcelの自動計算・操作をプログラミングする。したがって，Excelが持つ表形式とVBAの機能は，ゲーム理論が行う系統的計算の自動化を容易にし，その計算のためのツール製作の道具として適している。これらの点を鑑み，筆者は実際にゲーム理論の計算ツールを作るに至った。

ゲーム理論は1944年にフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンによって広く世に知られるようになってから，様々な理論的展開が行われ，諸種の命題定理を得ているが，実際の計算となると，戦略数などのパラメータの数が増えれば多大な労力を要する。ここで紹介するツールはその計算を自動的に行うものである。ゲーム理論が実用的に利用されることになれば，その計算をより短時間で行うソフトの開発が重要になる。その一例を示した点で，本ツールは意義を持つと考える。さらに，このようなツールの開発はゲーム理論の理論的展開の一助にもなるものと考える。

本ツールの計算操作機能は，マックスマックス戦略，マックスミニ戦略，ナッシュ均衡に関するもので，戦略数，プレイヤーの手番の順序，利得の入力・発生方法の変更も可能にしている。機能と操作の詳細については後述する。

今日ゲーム理論においては多くの議論が展開されており，それにつれて複雑な計算が伴うこ

とになる，本ツールは，現段階では基本的な機能しか持たないが，さらに多様な計算機能を追加することも可能である。

2. ゲーム理論について

確認のために，本ツールが扱う範囲でのゲーム理論について簡単な説明を行う。詳しい説明は専門書にゆずる。

ゲーム理論では次のような枠組みで議論が展開される。複数のプレイヤーがおり，プレイヤー達は戦略（または行為）として幾つかの選択肢をもち，その選択の結果いくらかの利得を得，さらにその利得は，他のプレイヤーの選択肢によっても影響を受ける。このような枠組みの下で各プレイヤーが取るべき戦略を論じるのがゲーム理論である。利得としては，金額以外に効用なども想定される。

プレイヤーとしては個人を想定することもできるし，組織・企業・国家を考えることもできる。伝統的な経済学が方程式をモデル・分析の中心に据えるのに対して，ゲーム理論ではそれぞれの経済主体が利得を求めて，戦略という具体的なアクションをとる点が大きな特徴となっている。

以下では，特に本ツールにかかわるゲーム理論の基本的用語について述べる。

（1）ゼロ和（ゼロサム）ゲーム

参加するプレイヤーの利得の合計が常に0であるようなゲームである。利得表の各枠には一つの数値のみが表記される。この数値はプレイヤーAの利得で，それに－1をかけたものがプレイヤーBの利得となる。よって，プレイヤーAとプレイヤーBの合計は0となる。つまりゼロ和である。ツールではオプションで，一つのセルにプレイヤーAとプレイヤーBの両方の利得を表示させることも，どちらか片方のプレイヤーの利得のみを表示させることもできる。

（2）マックスマックス基準

各行為について利益が最大になる状況を想定して，その最大値がさらに最大になるような行為を選択する。つまり最善の状態を，さらに最善にするような行為を選択する，という基準である。積極的・楽観的な立場に立つ基準であると言える。ここでの最大の中の最大をマックスマックス値と呼ぶ。またプレイヤーがマックスマックス基準で選んだ戦略，もしくはその組合せをMaxMax戦略と呼ぶ。

（3）マックスミニ基準

各行為について利得が最小になる状況を想定して，その最小値が最大になるような行為を選択する。つまり最悪の状態をなるべく引き上げようとする，という選択である。慎重・悲観的な立場に立つ基準であるといえる。ここでの最小の中の最大をマックスミニ値と呼ぶ。またプレイヤーがマックスミニ基準で選んだ戦略，もしくはその組合せをMaxMin戦略と呼ぶ。

（4）ナッシュ均衡

2人のプレイヤーの戦略がともに相手の手に対して最適な戦略となっている状態を，ナッシュ均衡と呼ぶ。したがって少なくともその部分にしぼって考えれば，まさしく均衡の状態にある。このナッシュ均衡はゲーム理論において重要な均衡概念となっている。

3. ツールの機能と操作

ここでは，ツールの機能と操作方法を説明する。後で詳しい説明を行うが，概略を述べると，プレイヤーは2人で，戦略数は1から10までを選べる。色付けや他のセルへの表示などによって，マックスマックス値・戦略とマックスミニ値・戦略，ナッシュ均衡の計算表示を行う。なお，それらを表示するか否かの選択もできる。

特にナッシュ均衡の動学的な逐次計算を特徴としている。つまり，まず初期の戦略の組が決まり，そこで相手の戦略を与えられたものとして，プレイヤーが最適な戦略を選ぶ，このことを繰り返す。その可能な結果は，ナッシュ均衡に行き着くか，ナッシュ均衡に行き着かないか，であるが，前者の場合には手番はナッシュ均衡で留まり，後者の場合には手番がいつまでも循環する。なお，ナッシュ均衡に行き着くまでの手番数は一定ではない。この動学的ゲームは，手番の順序が，先手がプレイヤーAかそれともプレイヤーBか，もしくは同時手番か，に依存するが，その内から一つをオプションで選ぶ。

これを行うのが＜Nash 検索＞機能である。さらに＜Nash 表＞機能では，利得表の全ての戦略の組を初期の戦略の組とし，それに対して今述べたナッシュ均衡の動学的ゲームの行き先，つまり＜Nash 検索＞の結果を表示する。

3.1　各表の説明

ツールで使われる表の説明をする。[1] 表は（利得表）が基本で，さらにそれをもとに計算される（総合表）（ナッシュ表）が加わる。表1が（利得表）に説明を加えたものである。表2の（利得表）を元にして，表3の（総合表）表4の（ナッシュ表）が計算されている。

（利得表）

表1，表2を参照。プレイヤーの戦略と利得の対応を表示する。プレイヤーはA，Bの2人で，戦略数は各プレーヤーにおいて1から10までを選べる。

加えて，プレイヤーAのある戦略において可能なプレイヤーAの最大利得・最小利得とその戦略，プレイヤーAの戦略を固定したときのプレイヤーBの最大利得・最小利得とその戦略，プレイヤーBのある戦略において可能なプレイヤーBの最大利得・最小利得とその戦略，プレイヤーBの戦略を固定したときのプレイヤーAの最大利得・最小利得とその戦略，そしてそれらから導かれるMaxMax（マックスマックス）戦略とMaxMin（マックスミニ）戦略，

表1　利得表の説明（ExcelVBAによるゲーム理論の計算ツール　;戦略数　5×5）　※　最大値最小値が複数ある場合は戦略番号が大きい方を選択

（利得表）

プレイヤー　B

プレイヤーA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	A Max	A Min	B Max	B Min
1	2　15	3　12	18　29	10　21	7　25						18	2	29	12
2	3　16	30　19	24　6	16　17	25　23						30	3	23	6
3	22　14	1　10	26　3	6　9	0　5						26	0	14	3
4	5　7	16　16	22　29	21　24	5　2						22	5	29	2
5	25　9	9　2	12　13	15　15	19　8						25	9	15	2
6														
7														
8														
9														
10														
Max	25　16	30　19	26　29	21　24	25　25									
Min	2　7	1　2	12　3	6　9	0　2									

MaxMax戦略

ナッシュ均衡

MaxMin戦略

プレイヤーBの戦略を固定したときのプレイヤーAの最大利得

プレイヤーBのある戦略において可能な最大利得

プレイヤーAのMaxMax戦略

プレイヤーAのある戦略において可能な最大利得

プレイヤーAのある戦略において可能な最小利得

プレイヤーAの戦略を固定したときのプレイヤーBの最小利得

プレイヤーAの戦略を固定したときのプレイヤーBの最大利得

プレイヤーAのMaxMin戦略

プレイヤーBのMaxMax戦略

プレイヤーBの戦略を固定したときのプレイヤーAの最小利得

プレイヤーBのある戦略において可能な最小利得

プレイヤーBのMaxMin戦略

同じ枠内において左がプレイヤーAの利得、右がプレイヤーAの利得である。

ExcelVBAによるゲーム理論の計算ツール

表2　（利得表）　　プレイヤー　B　　表の右と表の下のMaxMax戦略とMaxMin戦略は非表示

プレイヤーA

	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		Max	Min	Max	Min
1	23	24	3	26	24	1	22	13	25	16	22	27	6	17	18	6	21	3	7	28	25	3	28	1
2	7	25	15	10	13	8	8	7	13	29	17	26	9	5	21	27	29	21	4	17	29	4	29	5
3	29	16	22	17	25	20	28	27	4	6	18	1	3	5	20	0	1	10	2	9	29	1	27	0
4	8	13	2	5	1	2	13	21	8	27	6	7	23	19	15	29	8	15	9	26	23	1	29	2
5	25	9	19	23	26	14	5	24	5	13	4	20	10	29	3	8	16	10	19	3	26	3	29	3
6	26	17	7	20	5	0	11	19	20	8	3	23	17	12	7	15	14	26	26	25	26	3	26	0
7	1	25	27	15	0	9	21	12	28	24	26	19	25	17	29	29	10	2	8	0	29	0	29	0
8	12	23	29	22	18	10	17	16	17	18	25	7	21	30	0	2	18	0	18	1	29	0	30	0
9	14	0	1	5	3	25	24	3	9	14	27	4	11	6	1	9	28	29	14	12	28	1	29	0
10	28	7	14	29	4	28	3	27	11	18	7	3	26	9	16	0	15	13	27	8	28	3	29	0
Max	29	25	29	29	26	28	28	27	28	29	27	27	26	30	29	29	29	29	27	28				
Min	1	0	1	5	0	0	3	3	4	6	3	1	3	5	0	0	1	0	2	0				

表において 28　27　29　29 →ナッシュ均衡　　21　30 →MaxMax戦略　13　29 → MaxMin戦略

※　最大値最小値が複数ある場合は戦略番号が大きい方を選択

表3　（総合表）〈MaxMax戦略　MaxMin戦略　ナッシュ均衡の数〉

	戦略の組 A	戦略の組 B	戦略の組に対する利得 A	戦略の組に対する利得 B	MaxMax値 MaxMin値 A	MaxMax値 MaxMin値 B	起上時手番数 A	起上時手番数 B
MaxMax	8	7	21	30	29	30	10	10
MaxMin	2	5	13	29	4	6		

ナッシュ均衡の数＝　2

表4　（ナッシュ表）’プレイヤーA　先手の場合’

表の各プレイヤーの戦略の番号の組を初期戦略としたときの動力学的ナッシュ戦略の行き先

	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
1	3	4	0	0	0	0	3	4	7	8	7	8	0	0	7	8	7	8	0	0
2	3	4	0	0	0	0	3	4	7	8	7	8	0	0	7	8	7	8	0	0
3	3	4	0	0	0	0	3	4	7	8	7	8	0	0	7	8	7	8	0	0
4	3	4	0	0	0	0	3	4	7	8	7	8	0	0	7	8	7	8	0	0
5	3	4	0	0	0	0	3	4	7	8	7	8	0	0	7	8	7	8	0	0
6	3	4	0	0	0	0	3	4	7	8	7	8	0	0	7	8	7	8	0	0
7	3	4	0	0	0	0	3	4	7	8	7	8	0	0	7	8	7	8	0	0
8	3	4	0	0	0	0	3	4	7	8	7	8	0	0	7	8	7	8	0	0
9	3	4	0	0	0	0	3	4	7	8	7	8	0	0	7	8	7	8	0	0
10	3	4	0	0	0	0	3	4	7	8	7	8	0	0	7	8	7	8	0	0

0　0 →ナッシュ均衡に至らず、手番は循環する　　例　3　4 →ナッシュ均衡（3, 4）に至る

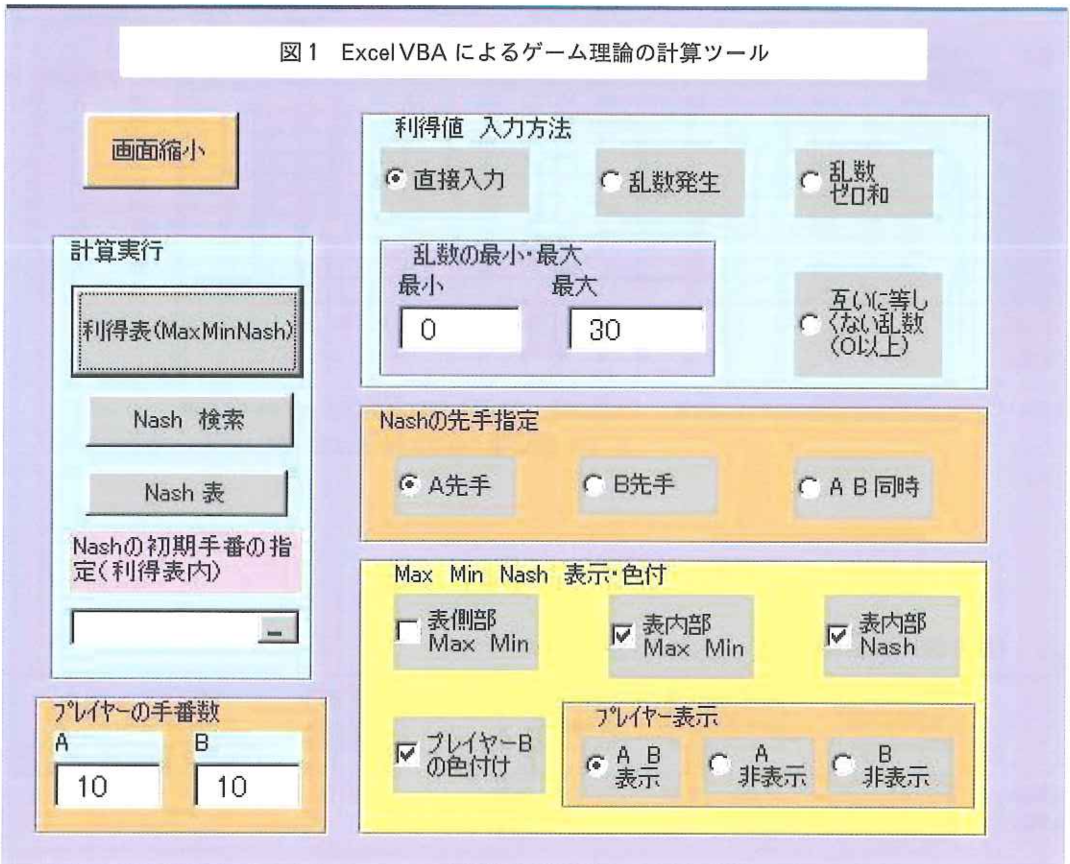

図1　Excel VBA によるゲーム理論の計算ツール

Nash（ナッシュ）戦略を計算表示する。これらの表示は利得表の内部と表の下側・右側面に数値またはセル・フォントに色を付けることで行う。ただし，それらの表示・非表示を選択できる。なお，最大利得，マックスマックス値，マックスミニ値が複数ある場合に，そこから一つを選ぶ必要があるときには，戦略番号の大きい方を選択する。

（総合表）

表3を参照。表2の（利得表）の両プレイヤーの MaxMax 戦略 MaxMin 戦略に対応する，プレイヤーAとBの戦略の組とその利得，それとプレイヤーAとBの MaxMax 値（最大利得の最大値），MaxMin 値（最小利得の最大値）を表示する。またプレイヤーAとBの起ち上げ時の手番数を表示するが，これをツールが立ち上げ時に読込み，終了時に書き込む。加えて，与えられた利得表のナッシュ均衡の数を表示する。

（ナッシュ表）

表4を参照。利得表内のプレイヤーAとBの全ての戦略を初期の戦略として，それに対し

てナッシュ的動学ゲームの行き先が，ナッシュ均衡かナッシュ不均衡かを表示する。ナッシュ均衡の場合はそのナッシュ均衡の戦略の組，ナッシュ不均衡の場合は(0, 0)を表示する。例えば(3, 4)と表示された場合，相手の戦略に対してプレイヤーが最適な戦略を選ぶことを繰り返すことで，最終的にプレイヤーＡとＢの戦略の組(3, 4)(＝ナッシュ均衡)に至ることを意味する。

3.2 フォームの説明

以下では概ね次のような対応になっている。≪○○≫はコントロールを載せるフレーム，＜○○＞は計算・表示の実行機能，[○○]は計算・表示のオプション機能である。

ツールの操作画面（フォーム）を図1に呈示する。以下に説明する各機能はツール画面上の同名のコントロールに対応している。

＜画面縮小＞

ツールの操作画面の縮小拡大ができる。これはワークシートを見安くするためである。縮小した画面でもう一度これを押すと元の画面に拡大する。

≪計算実行≫

＜利得表（Max Min Nash)＞

利得表に利得（数値）を入力する。入力方法としては「直接入力・乱数発生・乱数ゼロ和・互いに等しくない乱数(0以上)」があり，あらかじめその内の一つを選択する。選択は後述の≪利得値　入力方法≫のオプションボタンへのチェックで行う。表1～表3を参照。

その他次の仕様にしたがう。

1) プレイヤーは2人（ＡとＢ）とする
2) プレイヤーの戦略数として1から10までを選べ，プレイヤーＡの戦略数とプレイヤーＢの戦略数は別々に指定できる

(計算・表示)

3) 最大利得・最小利得，MaxMax戦略とMaxMin戦略を表示する。この表示は，利得表の内部と表の下側，右側のセルに数値を入力するか，色を付けることで行う。
4) Nash均衡を表示する。利得表の内部のセル内の文字に色を付けることで行う。
   なお，これらの表示の有無は[Max Min Nash表示・色付]のオプションで選択できる。表2では，表の下側，右側のMaxMax戦略，MaxMin戦略を非表示にしている。

＜Nash検索＞

ナッシュの戦略の決定方法に則って，プレイヤーＡとプレイヤーＢが戦略を変更していっ

たときの，一手ごとの動的な変化を見る。つまり，まず両者に初期の戦略を与え，その与えられた相手の戦略に対して，プレイヤーＡもしくはプレイヤーＢが自分にとって最善の戦略を選ぶことによって新しい戦略の組が決まる。それに対して再び各プレイヤーが最適な戦略を選ぶことになる。このようにして戦略の移動が行われる。戦略の移動は色の変化で表示する。初期戦略の指定は，キーボードによる番号入力か，後出の＜Nash の初期手番の指定(利得表内)＞でのマウスの指定で行う。戦略の移動が結果としてナッシュ均衡に至る場合には，戦略はそのナッシュ均衡に留まり，ナッシュ均衡に至らない場合には，同じ経路をいつまでも循環することになる。ナッシュ均衡に行き着くまでの手番数は一定ではない。＜Nash 検索＞を終了するときはダイアログボックスのキャンセルを押す。

ただし，ナッシュ均衡に留まるか否か，どのナッシュ均衡に至るかは，1)プレイヤーＡの先手，2)プレイヤーＢの先手，3)両者同時の手番変更，にも依存する。この指定は後述の＜Nash の先手指定＞で行う。

＜Nash 表＞

＜Nash 検索＞で述べたように，ナッシュ的な戦略に則って，プレイヤーＡとプレイヤーＢが戦略を変えていったとき，その結果は，あるナッシュ均衡に留まって動かないか，または，手番は循環し不定のままであるか，のどちらかである。この＜Nash 表＞では，利得表内のプレイヤーＡとＢの全ての戦略を初期の戦略として，それらに対してそのナッシュ検索後の行き先が，ナッシュ均衡かナッシュ不均衡かを表示する。ナッシュ均衡の場合は均衡の戦略の組，ナッシュ不均衡の場合は（0, 0）を表示する。＜Nash 表＞の例は表4，表5 - 2～表5 - 4，表6 - 2～表6 - 4で示される。

これも＜Nash 検索＞で述べたように，ナッシュ均衡に至るか否かは，1)プレイヤーＡの先手，2)プレイヤーＢの先手，3)両者同時の手番変更，にも依存する。この指定も後述の＜Nash の先手指定＞で行う。

＜Nash の初期手番の指定（利得表内）＞

利得表上のセルをマウスで指定することによって，＜Nash 検索＞機能における初期戦略を選択する。プレイヤーＡとＢどちらのセルを指定しても同じである。利得表の外を指定するとプログラムは止まる。

なお，初期戦略の入力をキーボードによる番号入力に切り替えるときは，ここの範囲表示を消去する必要がある。

≪プレイヤーの手番数≫

プレイヤーＡとプレイヤーＢの手番数を別々に１～10の整数で指定できる。ツールを閉じ

たときに直前の手番数が，（総合表）の初期手番数に書き込まれ，ツールの次の起ち上げ時にそれが読み込まれる。

≪利得値　入力方法≫

利得表への利得値の入力・発生方法を指定する。その方法は [直接入力] [乱数発生] [乱数ゼロ和] [互いに等しくない乱数（0 以上)] から選択できる。この内からオプションボタンへのチェックで一つを選択する。すでに表に入力されている数値をそのまま利用する [直接入力] と，他の 3 種類の乱数による発生方法に大きく分けられる。発生する乱数は全て整数とした。デフォルトを [直接入力] としているので[2] 乱数入力に切り替えるにはツールを起ち上げた後で，乱数入力のどれかを選択し直す必要がある。後出の [乱数の最小・最大] で発生する乱数の最小値と最大値の指定を行う。[互いに等しくない乱数(0 以上)] を除いて，負の値を指定することもできる。

[直接入力]

この直接入力では，あらかじめ表に入力されている数値をそのまま残すことになる。表に利得値を入力する場合にはこれを選択する。またすでに乱数によって入力済みの数値を残して，<Nash 検索>などによる色付けを消したいときにも，この入力方法を選べばよい。

[乱数発生]

乱数（整数）の発生による利得値の自動入力を行う。

[乱数ゼロ和]

ゼロ和ゲームに対応するもので，プレイヤー A と B の各戦略に対応する利得の和が 0 となるように乱数が発生する。ただし通常のゼロ和ゲームのように，プレイヤー A の利得のみを表示するには，[プレイヤー表示] で表示に関するオプション選択をする。ここではプレイヤー B のみ，プレイヤー A，B 両方の表示も可能である。

[互いに等しくない乱数（0 以上)]

乱数による自動発生を行うが，相手プレイヤーのある戦略に対しては，全て互いに異なる利得値を発生する。これはナッシュ戦略における最大値の一意性を保証するためのものである。乱数は整数のみなので，発生する乱数の最小値・最大値（整数）に関して，手番数≦最大値－最小値+1，という制限がある。またここでは最小値は 0 以上とする。これらが守られていないときはプログラムが止まる。単純な乱数入力である [乱数発生] に比べて計算速度がやや遅い。

[乱数の最小・最大]

発生する乱数の最小値・最大値の整数での指定が可能である。ただし，[互いに等しくない乱数 (0 以上)] では，負の値を指定できない。

≪Nash の先手指定≫

上で述べた<Nash 検索><Nash 表>における先手の指定をここで行う。[A 先手] [B 先手] [AB 同時] の内から一つを選択する。これらは 1)プレイヤー A の先手, 2)プレイヤー B の先手, 3)両者同時の手番変更, に対応する。

≪Max Min の表示・色表示≫

<利得表 (Max Min Nash)>における, MaxMax 戦略, MaxMin 戦略, Nash 均衡の表示の有・無を指定できる。<利得表 (Max Min Nash)>で述べたように, これらを利得表の内部と表の下側, 右側に色を付けることで表示することができるが, その表示がかえって煩わしいことがある。ここでは, チェックボックスのチェックを入れるかはずすかで, 表示を付けたり消したりできる。プレイヤー B の値に色を付けることもできる。

[プレイヤー表示]

利得表におけるプレイヤーの利得の表示の有無について指定できる。プレイヤー A と B 両方とも表示するか, プレイヤー A の表示を消すか, プレイヤー B の表示を消すかである。見安さに配慮してのことである。

その他, 表の書式や形式などはある程度利用者によるカスタマイズが可能である。また, あまりに大きな数値を指定すると, 指定した配列の次元を超えることでプログラムが止まることがある。現在のところ利得表などのファイルへの保存機能はない。必要ならばツールを終えて, Excel のコピー機能などを使って他のセルへ表をコピーして保存してもらいたい。

4. 計算結果からの予想

ここでは, 筆者がツールを実際に使用することで得た若干の所見を述べる。もとより演繹的に得られた命題ではなく, 繰り返し計算を行うことで, 帰納的に得られた所見である。この研究ノートでは理論的な根拠は示していない。よってある種の予想ともいうべきものである。[3] 本ツールの<Nash 表>機能を用いて得た, ナッシュ均衡の動学的な安定性に関して述べる。

すでに述べたように, <Nash 表>では利得表内の全てのプレイヤー A と B の初期の戦略に対して, プレイヤー A と B がナッシュの最適反応の行動をとったとき, 動学的に両プレイヤーの戦略が, ナッシュ均衡に到達するのか, もしくはナッシュ均衡に到達せずに循環しつづけるのかを判別し, なおかつナッシュ均衡に到達する場合には, そのナッシュ均衡の戦略の組を示すことができる。その結果は, 1)プレイヤー A の先手, 2)プレイヤー B の先手, 3)プレイヤー ABの同時手番, のどれかに依存する。(3. で述べたようにこの内から一つを<Nash の先手指定>で選択することができる。)

その前に, <Nash 表>を用いても確認されるが, 理論的にも自明な, 次の 2 つの事実を挙

げておく。自明な理由は，プレイヤーAは同じ列内で最大の利得を選び，プレイヤーBは同じ行内で最大の利得を選ぶからである。これらは表4，表5－2～表5－4，表6－2～表6－4にも反映されている。

a） A先手の場合，同じ列の全ての戦略の組は，それを初期戦略とした場合，全て同じナッシュの動学的結果に対応する。つまり，同様にナッシュ的に不均衡か，同じナッシュ均衡に向かうか，である。

b） B先手の場合，同じ行の全ての戦略の組は，それを初期戦略とした場合，全て同じナッシュの動学的結果に対応する。つまり，同様にナッシュ的に不均衡か，同じナッシュ均衡に向かうか，である。

1)プレイヤーAの先手，2)プレイヤーBの先手，3)プレイヤーABの同時手番，の3つの場合のナッシュ均衡の動学的関係について議論する。ここで，“戦略の組がナッシュ均衡に対応している”とは，その戦略の組から初めて逐次的な手番の移動が動学的にあるナッシュ均衡に達する，ということである。

まず，ナッシュ均衡を一つと仮定して所見を示す。[4)]

[所見1]

「ナッシュ均衡が一つのとき，ある初期戦略の組は，その戦略の組について，A先手とB先手の両方がともにナッシュ均衡に対応している場合そしてその場合のみ，AB同時手番のナッシュ均衡に対応している。」

ツールで計算したナッシュ表の例を表5－2～表5－4に示す。ここで[**所見1**]で述べたA先手，B先手，AB同時手番のナッシュ均衡の関係を確認できる。表5－1はその元になる利得表である。

<先手番の違いによるナッシュ均衡の比較>　ナッシュ均衡数　1　戦略数　5×5　　MaxMax戦略　MaxMin戦略は非表示

表5－1

（利得表）　　プレイヤー　B

プレイヤーA	1	2	3	4	5	6
1	2 15	3 12	18 29	10 21	7 25	
2	3 16	30 19	24 6	16 17	25 23	
3	22 14	1 10	26 3	6 9	0 5	
4	5 7	16 16	22 29	21 24	5 2	
5	25 9	9 2	12 13	15 15	19 8	
6						

表5－2　　A先手

（ナッシュ表）

	1	2	3	4	5	6
1	0 0	2 5	0 0	0 0	2 5	
2	0 0	2 5	0 0	0 0	2 5	
3	0 0	2 5	0 0	0 0	2 5	
4	0 0	2 5	0 0	0 0	2 5	
5	0 0	2 5	0 0	0 0	2 5	
6						

表5－3　　B先手

（ナッシュ表）

	1	2	3	4	5	6
1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	
2	2 5	2 5	2 5	2 5	2 5	
3	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	
4	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	
5	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	
6						

表5－4　　AB同時手番

（ナッシュ表）

	1	2	3	4	5	6
1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	
2	0 0	2 5	0 0	0 0	2 5	
3	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	
4	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	
5	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	
6						

次に，[所見1]を一般化させて，ナッシュ均衡が二つ以上を含む場合について述べたのが，[所見2]である。当然ナッシュ均衡が一つの場合も含む。

[所見2]

「ある初期戦略の組は，その戦略の組について，A先手とB先手の両方がともにある同じナッシュ均衡に対応している場合そしてその場合にのみ，AB同時手番のその同じナッシュ均衡に対応している。それ以外の場合，AB同時手番はナッシュ均衡に対応していない。」

ここで，ある同じナッシュ均衡とは，ナッシュ均衡が複数含まれる場合には，その内の一つを指している。この所見を，以下ではある集合を定義することで記述してみる。

ツールで計算したナッシュ表の例を表6－2～表6－4に示す。ここで[所見2]で述べたA先手，B先手，AB同時手番のナッシュ均衡の関係を確認できる。表6－1はその元になる利得表である。

<先手番の違いによるナッシュ均衡の比較>　ナッシュ均衡数　2　戦略数 6×6　　MaxMax戦略　MaxMin戦略は非表示

表6－1

（利得表）　　プレイヤー　B

プレイヤーA	1		2		3		4		5		6	
1	5	2	9	20	8	4	24	6	10	7	22	22
2	20	23	8	20	24	19	22	18	27	13	6	30
3	19	23	21	4	9	3	9	14	17	8	8	28
4	28	2	28	24	16	8	0	13	22	18	11	23
5	7	7	17	6	23	23	12	11	8	19	4	27
6	29	12	15	19	21	15	28	13	7	17	19	2

表6－2　　A先手

（ナッシュ表）

	1		2		3		4		5		6	
1	4	2	4	2	1	6	4	2	1	6	1	6
2	4	2	4	2	1	6	4	2	1	6	1	6
3	4	2	4	2	1	6	4	2	1	6	1	6
4	4	2	4	2	1	6	4	2	1	6	1	6
5	4	2	4	2	1	6	4	2	1	6	1	6
6	4	2	4	2	1	6	4	2	1	6	1	6

表6－3　　B先手

（ナッシュ表）

	1		2		3		4		5		6	
1	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6
2	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6
3	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6
4	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2
5	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6	1	6
6	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2

表6－4　　AB同時手番

（ナッシュ表）

	1		2		3		4		5		6	
1	0	0	0	0	1	6	0	0	1	6	1	6
2	0	0	0	0	1	6	0	0	1	6	1	6
3	0	0	0	0	1	6	0	0	1	6	1	6
4	4	2	4	2	0	0	4	2	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	6	0	0	1	6	1	6
6	4	2	4	2	0	0	4	2	0	0	0	0

次のように，プレイヤーの先手番の違いに応じた，あるナッシュ均衡Qに対応する初期戦略の組の集合を定義する。これは表5－2～表5－4，表6－2～6－4で示される。

（ナッシュ均衡に達する初期戦略の組の集合の定義）

S（Q；A先手）≡A先手の場合にナッシュ均衡Qに向かう初期戦略の組の集合

S（Q；B先手）≡B先手の場合にナッシュ均衡Qに向かう初期戦略の組の集合　　（1）

S（Q；AB同時手番）≡AB同時手番の場合にナッシュ均衡Qに向かう初期戦略の組の集合

この定義の元で[所見2]の文意は次のように言い換えることができる。すでに述べたようにいずれのナッシュ均衡にも対応しない場合には手番は循環する。

S（Q；A先手）∩S（Q；B先手）＝S（Q；AB同時手番）　(2)

(2) から当然次が成り立つ。

S（Q；A先手）⊇S（Q；AB同時手番）　(3a)

S（Q；B先手）⊇S（Q；AB同時手番）　(3b)

(3a)(3b)で等式が成り立つのは，全ての初期戦略の組に関して，A先手の場合とB先手の場合で同じナッシュ均衡Qに対応している場合のみである。その場合以外では，ナッシュ戦略に向かう戦略の組は，AB同時手番の場合は，A先手の場合とB先手の場合それぞれの真部分集合となる。もちろん，ナッシュ均衡に向かう初期戦略の数についても，AB同時手番はA先手とB先手より少なくなる。これらをまとめると次のようになる。|S( )|は集合S( )の要素の数とする。

S（Q；A先手）≠S（Q；B先手）のとき，そしてそのときのみ次が成り立つ。

S（Q；A先手）⊃S（Q；AB同時手番）　(4a)

S（Q；B先手）⊃S（Q；AB同時手番）　(4b)

|S（Q；A先手）|＞|S（Q；AB同時手番）|　(5a)

|S（Q；B先手）|＞|S（Q；AB同時手番）|　(5b)

S（Q；A先手）＝S（Q；B先手）のとき，そしてそのときのみ次が成り立つ。

S（Q；A先手）(＝S（Q；B先手））＝S（Q；AB同時手番）　(6a)

|S（Q；A先手）|(＝|S（Q；B先手）|）＝|S（Q；AB同時手番）|　(6b)

ところで先のa)b)を考え合わせると，ナッシュ均衡が2つ以上存在した場合，同じあるQに対してS(Q；A先手）≠S(Q；B先手)が必ず成立することになる。また，ナッシュ均衡が1つの場合でも利得表の全ての戦略の組がナッシュ均衡に対応しなければ，S(Q；A先手)＝S(Q；B先手)とはならない。

これらをまとめておくと次のようになる。「S(Q；A先手)(＝S(Q；B先手))＝S(Q；AB同時手番)が成り立つのは，利得表の全ての戦略の組が同一のナッシュ均衡に対応している場合，そしてその場合のみである」

これは特殊な場合を除いて，一般にAB同時手番は，ナッシュ均衡に向かう確率がA先手もしくはB先手に比べて，小さいということであり，より不安定である，ということができる。[5]

繰り返しになるが，これらは本ツールで繰り返し計算することによって得た，あくまでも予想としての所見である。

ツールによる計算結果から気がついた他の点を挙げておく。これらもあくまで所見である。

・プレイヤーAとBで戦略の数が同じ場合でも、|S(Q；A先手))|≠|(S(Q；B先手)|

となるとはかぎらない。つまり，一般にプレイヤーAとBはナッシュ均衡に向かう戦略の組の数において対称ではない。

・ゼロ和ゲームでは，戦略の数が増えるとナッシュ均衡の発生の確率が極端に減る。

本ツールは，さらに次のような機能の付加とそれにともなう分析が可能になるのではないかと考える。

・シミュレーションを繰り返すことで，ナッシュ均衡や囚人のジレンマの発生確率を計算する。
・繰り返しゲームにおいて発生するプレイヤーの利得を累積計算する。
・混合ゲームにおけるナッシュ均衡を計算する。
・支配戦略に関する表示・操作機能を付加する。
・各種の行動ルールにしたがう繰り返しゲームを計算する。

5. むすびに

本ツールはあくまでも，マックスマックス戦略やマックスミニ戦略，ナッシュ均衡といったゲーム理論の基本的な計算のためのものである。しかし，ゲーム理論において展開される他の議論のための計算もExcel VBAで自動化することができよう。たとえば上でも挙げたように，本ツールでは純粋戦略のみを扱ったが，混合戦略の計算も考えられる。VBAの機能からいえば，利得表から離れた計算も可能であるし，また，プレイヤーの数を3人以上にすることも考えられる。その他利得表のファイルへの保存などの機能の付加も難しいものではない。

ゲーム理論が理論のための理論には終わらず，実用性を持つためには，実際の計算が必要になることは言うまでもない。しかしその計算は，手番数やプレイヤーの手番が増えると，かなり煩瑣となり，計算ミスも起きやすくなる。ゲーム理論のためのツールが，実用的計算の道具でありながらも，ゲーム理論の理論的展開の一助，また教育・学習の手段にもなるのではないかと考える。本ツールがその一例になればと願う。[6]

注

1）本ツールは，Microsoft (R) Excel 2000で作成した。
2）利用者がカスタマイズできるので，他のオプション等のデフォルトについては，特に述べない。
3）ただし，少なくとも高い確率で発生する現象だということは言えよう。
4）例えば，同じナッシュ均衡に至るまでの手番数がプレイヤーA，Bとも2のときは，これらの所見は自明なところもあるかもしれないが，<Nash検索>機能で確認できるようにその手番数は2と

は限らないし，同じとも限らない。

5) 同時手番は相手の直前の手番が分からないという点で不完全情報の状況にある，ということもできる。R. Gibbons『経済学のためのゲーム理論入門』の p. 67，p. 120 を参照。

6) 本ツールは研究に限らず教育用にも使える。利用を希望する者には事情が許す限り配布するつもりである。

参考文献

R. Gibbons, *Game theory for applied economists*, Princeton University Press, 1992. (福岡正夫・須田伸一　訳『経済学のためのゲーム理論入門』創文社，1995 年.)

鈴木光男『ゲーム理論の世界』勁草書房，1999 年.

中山幹夫『はじめてのゲーム理論』有斐閣，1997.

(2003 年 3 月 11 日　受理)