自己同形群に関して同値なファジィ部分群の諸性質

和　　泉　　孔　　二

Ⅰ　まえがき

群の概念は19世紀前半に導入されて以来，今日では数学の各分野のみならず，理論物理学その他においても重要な役割を演じている。中でも，量子力学との関連性はあまりにも有名であろう。

ファジィ部分群[9] の概念が与えられて以来，群論[6] や環論[8] での諸概念と関連させて，種々の研究がなされている[1)〜5), 7), 10)〜12)]。

本論文では，変換群Gに関して同値という概念を自己同形群$\mathrm{Aut}(G)$に関して同値と限定することによって，ファジィ部分集合の間に同値関係が定義できることを示す。次に，等方部分群である中心化群や正規化群という概念をファジィ部分群の場合に拡張し，その諸性質を述べる。また，ファジィ部分群の族によって生成されるファジィ部分群についても言及し，自己同形群$\mathrm{Aut}(G)$に関して同値ということとの関連性についても述べる。

Ⅱ　ファジィ部分群に関する諸性質

〔定義2.1〕

群Gのファジィ部分集合Hが，Gのファジィ部分群であるとは，

1）$H(xy)\geq H(x)\wedge H(y)$　　$(\forall x, y\in G)$

2）$H(x^{-1})\geq H(x)$　　$(\forall x\in G)$

が成立する場合をいう。

明らかに，

$$H(e)\geq H(x), H(x^{-1})=H(x) \qquad (\forall x\in G)$$

などが成立する。ただし，eは群Gの単位元とする。また，

$$H_\lambda=\{x\in G \mid H(x)\geq\lambda, \lambda\in[0, 1]\}$$

のことをHのレベル部分群と呼ぶ。以後，群Gのファジィ部分群全体のクラスを$S(G)$と表すこととする。

〔定義2.2〕

$H(\in S(G))$が正規ファジィ部分群であるとは，

$$H(xyx^{-1})\geq H(y) \qquad (\forall x, y\in G)$$

が成立する場合をいう。

〔定義2.3〕

$H(\in S(G))$, $\forall a\in G$に対し，Gのファジィ部分集合aH，Haを

$$(aH)(x)=H(a^{-1}x) \qquad (\forall x\in G)$$

$$(Ha)(x)=H(xa^{-1}) \qquad (\forall x\in G)$$

と定義し，aHをファジィ左剰余類，Haをファジィ右剰余類と呼ぶ。

通常の場合と同様に，明らかに次の定理が成立する。

〔定理2.1〕

$H(\in S(G))$が正規ファジィ部分群であることは，以下の３つの条件のどれか１つが成立することと同値である。

1）$H(xyx^{-1})=H(y)$　　$(\forall x, y\in G)$

2）$H(xy)=H(yx)$　　$(\forall x, y\in G)$

3）$aH=Ha$　　$(\forall a\in G)$

（証明）

1）についてだけ示せば十分である。

$$H(xyx^{-1})\geq H(y)$$

および

$$H(y)=H(x^{-1}(xyx^{-1})(x^{-1})^{-1}) \geq H(xyx^{-1})$$

より

$$H(xyx^{-1})=H(y)$$

(Q.E.D.)

一般に，２つの群G，G'に対し，

$$\mathrm{Hom}(G, G')=\{f : G \longrightarrow G' \mid (f\,;\text{準同形写像})\}$$

とおくと，準同形写像の積

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x) \quad (f, g\in \mathrm{Hom}(G, G'),\ x\in G)$$

により，$\mathrm{Hom}(G, G')$は乗法群をなす。また，写像の合成により，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(G, G')\times \mathrm{Hom}(G', G'') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(G, G'') \\ \cup & & \cup \\ (f, g) & \longmapsto & g\circ f \end{array}$$

なる写像が得られる。特に，$\mathrm{Hom}(G, G)$のことを$\mathrm{End}(G)$と表す。また，群GからGへの同形写像を自己同形と呼び，その全体を$\mathrm{Aut}(G)$と表す。$\mathrm{Aut}(G)$は写像の合成

$$(f\cdot g)(x)=f(g(x)) \quad (f, g\in \mathrm{Aut}(G), x\in G)$$

を積として群をなし，$\mathrm{Aut}(G)$のことをGについての自己同形群と呼ぶ。ここで，$a\in G$に対し，

$$\begin{array}{ccc} I_a : G & \longrightarrow & G \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & axa^{-1} \end{array}$$

という写像は自己同形となり，内部自己同形と呼び，その全体を$\mathrm{Inn}(G)$で表す。このとき，$\mathrm{Inn}(G)$は$\mathrm{Aut}(G)$の正規部分群をなし，商群$\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$のことを$\mathrm{Out}(G)$と表し，$G$の外部自己同形群と呼ぶ。群$G$の部分群$N$が正規であることを$N\triangleleft G$と表すことにすると，

$$N\triangleleft G \iff I_a(N)=N \quad (\forall a\in G)$$

であるが，このことを強めて，Gの部分群であって，任意のGの自己同形で不変なものを特性部分群と呼ぶことにする。

この特性部分群という概念をファジィ化すれば，以下のようになる。

〔定義2.4〕

$H(\in S(G)), \forall\varphi\in \mathrm{Aut}(G)$に対し，

$$H(\varphi(x))\geq H(x) \quad (\forall x\in G)$$

であるとき，Hを群Gの特性ファジィ部分群と呼ぶ。ここで，

$$\forall\varphi\in \mathrm{Aut}(G), \exists\varphi^{-1}\in \mathrm{Aut}(G)$$

であることから，

$$H(x)=H(\varphi^{-1}(\varphi(x))) \geq H(\varphi(x))$$

となるので，Hが群Gの特性ファジィ部分群であることは

$$H(\varphi(x))=H(x) \quad (\forall\varphi\in \mathrm{Aut}(G), \forall x\in G)$$

が成立することと同値である。したがって，任意のGの自己同形で不変であるといえる。

ファジィ部分群とそのレベル部分群との間に，次の定理が明らかに成立する。

〔定理2.2〕

$H(\in S(G))$に対し，

H；Gの正規ファジィ部分群
$\iff$ H_λ；Gの正規部分群

および

H；Gの特性ファジィ部分群
$\iff$ H_λ；Gの特性部分群

が成立する。ただし，$\lambda\in[0, 1]$とする。

一般に，群Gと集合Xに対し，写像

$$\begin{array}{ccc} f : G\times X & \longrightarrow & X \\ \cup & & \cup \\ (a, x) & \longmapsto & f(a, x) \end{array}$$

が与えられ，

$$f(a, x)=a\cdot x$$

と表すものとする。この写像が２つの条件

$$(a\cdot b)\cdot x=a\cdot(b\cdot x) \quad (\forall a, b\in G, \forall x\in X)$$
$$1\cdot x=x \quad (\forall x\in X)$$

を満たすとき，群Gは集合Xに作用していると呼び，GをX上の変換群と呼ぶ。

いま，$x, y\in X$に対し，

$$ax=y$$

となるような$a\in G$が存在するとき，xとyはG－同値であると呼び，

$$x \underset{G}{\frown} y$$

と表す。Xをこの同値関係により類別した各同値類をG－軌道と呼び，その全体を$G\backslash X$と表す。

GをX上の変換群とするとき，$x\in X$に対し，

$$G_x=\{a\in G \mid ax=x\}$$

と定めると，$a, a'\in G$に対し，明らかに

$$a(a')^{-1}\in G$$

であることから，G_xはGの部分群となる。G_xをxにおけるGの等方部分群と呼ぶ。

さて，群GをG自身の上へ内部自己同形で作用させ，

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \longrightarrow & G \\ \cup & & \cup \\ (a,x) & \longmapsto & I_a(x)=axa^{-1} \end{array}$$

という写像を考えれば，GはG自身の上への変換群となる。このとき，$x, y\in G$に対し，

$$\exists a\in G : y=axa^{-1}$$

であるとき，xとyは共役であるという。これは上で与えたGの作用により，xとyが同じG—軌道に属することを意味している。この場合，xを含むG—軌道をxの共役類と呼ぶ。このとき，$x(\in G)$におけるGの等方部分群は

$$\{a\in G \mid ax=xa\}$$

であり，これをxにおけるGの中心化群と呼び，$C_G(x)$と表す。

XをGの部分集合の全体とし，YをGの部分群の全体とするとき，XとYにGを内部自己同形で作用させることを考えよう。このとき，$S(\in X)$における等方部分群は

$$\{a\in G \mid aSa^{-1}=S\}$$

であり，これをSの正規化群と呼び，$N_G(S)$と表す。$N_G(S)$はSの中心化群

$$C_G(S)=\{a\in G \mid as=sa \ (\forall s\in S)\}$$

を正規部分群として含む。すなわち，

$$N_G(S)\triangleright C_S(S)$$

が成立する。実際，$N_G(S)\ni x$, $C_G(S)\ni y$, $S\ni s$に対し，

$$\begin{aligned} &(xyx^{-1})s(xyx^{-1})^{-1} \\ &=(xyx^{-1})s(xy^{-1}x^{-1}) \\ &=xy(x^{-1}sx)y^{-1}x^{-1} \\ &=x(x^{-1}sx)yy^{-1}x^{-1} \\ &=x(x^{-1}sx)x^{-1} \\ &=s \end{aligned}$$

より

$$xC_G(S)x^{-1}\subseteq C_G(S)$$

であることが示されるからである。

以上に述べてきた正規化群や中心化群という概念をファジィ化すると，次のようになる。

〔定義2.5〕

$H\in S(G)$に対し，

$$N(H)=\{a\in G \mid H(axa^{-1})=H(x)\,(\forall x\in G)\}$$

をHのファジィ正規化群と呼ぶ。

〔定義2.6〕

$H\in S(G)$に対し，

$$C(H)=\{a\in G \mid H([a,x])=H(e)\,(\forall x\in G)\}$$

をHのファジィ中心化群と呼ぶ。ここで，交換子［x, y］を

$$[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$$

と定めている。

ファジィ正規化群およびファジィ中心化群については，明らかに以下の定理が成立する。

〔定理2.3〕

$H\in S(G)$に対し，

1）$N(H)$；Gの部分群

2）H；ファジィ正規　$\Longleftrightarrow$　$N(H)=G$

3）H；群$N(H)$のファジィ正規部分群

が成立する。

〔定理2.4〕

$H\in S(G)$に対し，

1）$C(H)$；Gの部分群

2）$C(H)\triangleleft N(H)$

が成立する。

次に，ファジィ部分群の積についての定義を与えよう。

〔定義2.7〕

$H_i\in S(G_i)\,(i=1, 2, \cdots, n)$に対し，これらの積$H_1\times H_2\times\cdots\times H_n$を

$$(H_1\times H_2\times\cdots\times H_n)((x_1, x_2, \cdots x_n)) = \bigwedge_{i=1}^{n} H_i\ (x_i) \qquad (x_i\in G_i)$$

と与えられる$G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$のファジィ部分集合であると定義する。

このとき，明らかに次の定理が成立する。

〔定理2.5〕

$H_i\in S(G_i)\,(i=1, 2, \cdots, n)$に対し，

$$H_1\times H_2\times\cdots\times H_n\in S(G_1\times G_2\times\cdots\times G_n)$$

が成立する。

III　自己同形群に関して同値なファジィ部分群

G—同値の概念を特に自己同形群$\mathrm{Aut}(G)$に限定することによって，ファジィ部分群の間に以下のような同値関係が導入される。

〔定義3.1〕

H, $K\in S(G)$に対し，HとKが自己同形群$\mathrm{Aut}(G)$に関して同値であるとは，

$$\exists\varphi\in\mathrm{Aut}(G):H(x)=K(\varphi(x))\quad(\forall x\in G)$$

を満たすときをいう。

以後，自己同形群$\mathrm{Aut}(G)$に関して同値のことを，略して$\mathrm{Aut}(G)$−同値と呼ぶことにする。このとき，

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "H"'] & & G \arrow[dl, "K"] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd}$$

であることから，$\mathrm{Aut}(G)$−同値という関係は群Gのファジィ部分群全体のクラス$S(G)$における同値関係である。したがって，$\mathrm{Aut}(G)$−同値という関係によって，$S(G)$は類別されることがわかる。以下，HとKが$\mathrm{Aut}(G)$−同値であるということを

$$H \underset{\mathrm{Aut}(G)}{\sim} K$$

と書くことにする。

自己同形群$\mathrm{Aut}(G)$は写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}(G)\times S(G) & \longrightarrow & S(G) \\ \cup & & \cup \\ (\varphi,\ H) & \longmapsto & H\circ\varphi \end{array}$$

によって$S(G)$に作用しているので，この作用に関する軌道は$\mathrm{Aut}(G)$−同値なファジィ部分群の類である。

次の定理が成立するのは，明らかであろう。

〔定理3.1〕

H, $K\in S(G)$に対し，以下の各条件は同値である。

1）$H \underset{\mathrm{Aut}(G)}{\sim} K$

2）$\exists\varphi\in\mathrm{Aut}(G):H(\varphi(x))=K(x)(\forall x\in G)$

3）$\exists\varphi\in\mathrm{Aut}(G):H\circ\varphi=K$

4）$\exists\psi\in\mathrm{Aut}(G):K\circ\psi=H$

5）$\exists\psi\in\mathrm{Aut}(G):H_\lambda=\psi(K_\lambda)\quad(\forall\lambda\in[0,1])$

〔系3.1〕

$\{H^{(\alpha)}\mid\alpha\in A\}$；$\mathrm{Aut}(G)$−同値な$G$のファジィ部分群の族

$\Longleftrightarrow$

$\{H_\lambda^{(\alpha)}\mid\alpha\in A\}$；$\mathrm{Aut}(G)$−同値な$G$の部分群の族　$(\forall\lambda\in[0,1])$

〔系3.2〕

H；Gの特性ファジィ部分群

$\Longleftrightarrow$　H；$\mathrm{Aut}(G)$−同値なGのファジィ部分群の族の上で定数関数

さて，一般に群Gの部分集合Tに対し，Tの元の有限個のべき積

$a_1^{m_1}\,a_2^{m_2}\cdots a_n^{m_n}$（$n$, $m_i\in\mathbb{Z}$, $a_i\in T$）の全体は，Tを含むGの部分群となる。これを〈T〉で表し，Tで生成される部分群と呼んでいる。また，Gの部分群Hは

$$H=\langle a\rangle=\{a^m\mid m\in\mathbb{Z}\}$$

というように１つの元で生成されるとき，巡回群であると呼び，aをHの生成元という。なお，Gの部分群Hは，有限個のGの元により生成されるとき，有限生成であるという。

このことに関連して，Gのファジィ部分群の族によって生成されるファジィ部分群を，以下に定義しよう。

〔定義3.2〕

Gのファジィ部分群の族 $\{H^{(\alpha)}\mid\alpha\in A\}$ に対し，Gの部分群の族 $\{H_\lambda^{(\alpha)}\mid\alpha\in A\}$ によって生成される部分群

$$T_\lambda=\{x\mid x=a_1^{m_1}\,a_2^{m_2}\cdots a_n^{m_n}\quad(n,\ m_i\in\mathbb{Z},\ a_i\in H_\lambda^{(\alpha_i)})\}$$

を考える。このとき，Gのファジィ部分群

$$T=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\cdot T_\lambda$$

を $\{H^{(\alpha)}\mid\alpha\in A\}$ によって生成されるファジィ部分群と呼ぶ。このファジィ部分群Tは，すべての$H^{(\alpha)}$を含む最小のものである。

〔補題3.1〕

$K\in S(G)$, $\varphi\in\mathrm{Aut}(G)$に対し，$G$のファジィ部分集合$H$が

$$H(x)=K(\varphi(x)) \qquad (\forall x\in G)$$

を満たすとすると，

$$H \underset{\mathrm{Aut}(G)}{\sim} K$$

が成立する。

（証明）

$$\begin{aligned} H(xy) &= K(\varphi(xy)) \\ &= K(\varphi(x)\varphi(y)) \\ &\geq K(\varphi(x))\wedge K(\varphi(y)) \\ &= H(x)\wedge H(y) \\ H(x^{-1}) &= K(\varphi(x^{-1})) \\ &= K((\varphi(x))^{-1}) \\ &\geq K(\varphi(x)) \\ &= H(x) \qquad (\forall x, y\in G) \end{aligned}$$

であることから，$H\in S(G)$といえるので

$$H \underset{\mathrm{Aut}(G)}{\sim} K$$

であることが示された。　（Q.E.D.）

〔補題3.2〕

Gの$\mathrm{Aut}(G)$－同値な部分群の族において，すべての部分群によって生成される部分群は，Gの特性部分群である。

〔定理3.2〕

$\{H^{(\alpha)}\mid\alpha\in A\}$；$\mathrm{Aut}(G)$－同値な$G$のファジィ部分群の族

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1)\ \bigcap_{\alpha\in A}H^{(\alpha)}\text{；}G\text{の特性ファジィ部分群} \\ 2)\ \{H^{(\alpha)}\mid\alpha\in A\}\text{によって生成されるファジィ部分群は，}G\text{の特性ファジィ部分群である。} \end{cases}$$

（証明）

1）について：

$$H^{(\alpha)}\in S(G) \qquad (\forall\alpha\in A)$$

$$\Longrightarrow \bigcap_{\alpha\in A}H^{(\alpha)}\in S(G)$$

であることから，補題3.1より

$\forall\varphi\in\mathrm{Aut}(G), \forall\alpha\in A,$

$\exists H^{(\alpha')}\in\{H^{(\alpha)}\mid\alpha\in A\}, \alpha'\in A'\subseteq A$

$: H^{(\alpha')}(x)=H^{(\alpha)}(\varphi(x)) \qquad (\forall x\in G)$

といえる。したがって

$$\begin{aligned} \Big(\bigcap_{\alpha\in A}H^{(\alpha)}\Big)(\varphi(x)) &= \bigwedge_{\alpha\in A}H^{(\alpha)}(\varphi(x)) \\ &= \bigwedge_{\alpha'\in A'}H^{(\alpha')}(x) \\ &\geq \bigwedge_{\alpha\in A}H^{(\alpha)}(x) \\ &= \Big(\bigcap_{\alpha\in A}H^{(\alpha)}\Big)(x) \end{aligned}$$

であることから，$\bigcap_{\alpha\in A}H^{(\alpha)}$は$G$の特性ファジィ部分群であることがわかる。

2）について：定義3.2で与えられたTを$\{H^{(\alpha)}\mid\alpha\in A\}$によって生成されるファジィ部分群とすると，

$$T=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\cdot T_\lambda$$

を構成するT_λは$\{H_\lambda^{(\alpha)}\mid\alpha\in A\}$によって生成される部分群であり，また系3.1より$\{H_\lambda^{(\alpha)}\mid\alpha\in A\}$は$\mathrm{Aut}(G)$－同値な$G$の部分群の族である。したがって，補題3.2より，$T_\lambda$は$G$の特性部分群であることから，$T$は$G$の特性ファジィ部分群であることが示された。　（Q.E.D.）

さて，定義2.3において，$H\in S(G), \forall a\in G$に対し，ファジィ左剰余類$aH$を

$$(aH)(x)=H(a^{-1}x) \qquad (\forall x\in G)$$

というGのファジィ部分集合で定義した。このことに関連して，次の定義を与えよう。

〔定義3.3〕

$H\in S(G)$に対し，集合

$$G/H=\{aH\mid a\in G\}$$

の要素の個数をGにおけるHの指数と呼び，$[G:H]$と表す。

次に，ファジィ部分群の間の同形という概念を定義しよう。

〔定義3.4〕

$H\in S(G), K\in S(\bar{G})$に対し，

1）$G\overset{\varphi}{\cong}\bar{G}$　$(\varphi: G\to\bar{G})$

2）$f(H(xy))=K(\varphi(x)\varphi(y)) \qquad (\forall x, y\in G)$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "H"'] & & \bar{G} \arrow[dl, "K"] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd}$$

であるようなφおよびfが存在すれば，

$$f: H(G) \longrightarrow K(G)$$

は単射である。このとき，HとKは同形であると呼び，

$$H \overset{(f,\varphi)}{\equiv} K$$

と表す。

〔定理3.3〕

Aut(G)－同値なGのファジィ部分群は同形であって，Gにおけるそれらの指数は等しい。

（証明）

$H, K \in S(G)$ に対し，

$$H \underset{\mathrm{Aut}(G)}{\frown} K$$

とすると

$$\exists \varphi \in \mathrm{Aut}(G): H(x) = K(\varphi(x)) \quad (\forall x \in G)$$

である。いま，

$$\begin{array}{ccc} f: H(G) & \longrightarrow & K(G) \\ \cup & & \cup \\ H(x) & \longmapsto & K(\varphi(x)) \end{array} \quad (\forall x \in G)$$

が与えられたとすると

$$\begin{aligned} f(H(xy)) &= K(\varphi(xy)) \\ &= K(\varphi(x)\varphi(y)) \end{aligned}$$

であり，また

$$\forall H(x), H(y) \in H(G),$$
$$f(H(x)) = f(H(y)) \Rightarrow H(x) = H(y)$$

であることから

$$H \overset{(f,\varphi)}{\equiv} K$$

であることが示された。

次に，

$$[G:H] = [G:K]$$

であることを示そう。まず，

$$\exists \varphi \in \mathrm{Aut}(G): H(x) = K(\varphi(x)) \quad (\forall x \in G)$$

であることより，$\forall a \in G$に対し，

$$\begin{aligned} (aH)(x) &= H(a^{-1}x) \\ &= K(\varphi(a^{-1}x)) \\ &= K(\varphi(a^{-1})\varphi(x)) \\ &= K((\varphi(a))^{-1}\varphi(x)) \\ &= (\varphi(a)K)(\varphi(x)) \end{aligned}$$

となる。ここで，

$$\begin{array}{ccc} \Psi: G/H & \longrightarrow & G/K \\ \cup & & \cup \\ aH & \longmapsto & \varphi(a)K \end{array}$$

という写像Ψを考えると，明らかにΨは全射である。また，

$$\forall aH, bH \in G/H,$$
$$\Psi(aH) = \Psi(bH)$$

すなわち，

$$\varphi(a)K = \varphi(b)K$$

とすると

$$(\varphi(a)K)(\varphi(x)) = (\varphi(b)K)(\varphi(x))$$

したがって

$$(aH)(x) = (bH)(x) \quad (\forall x \in G)$$

となるので

$$aH = bH$$

であり，Ψが単射であることがわかる。

以上のことから

$$[G:H] = [G:K]$$

であることが示された。　(Q.E.D.)

Ⅳ　ファジィ正規化群とファジィ中心化群

定義2.5および定義2.6で与えたファジィ正規化群やファジィ中心化群の性質を，Aut(G)－同値という概念などと関連させて述べよう。

〔定理4.1〕

$$H \in S(G) \quad \Rightarrow \quad C(H) \lhd G$$

が成立する。

（証明）定理2.4より，$C(H)$はGの部分群であり，また$\forall a \in C(H), \forall g \in G$に対し，

$$\begin{aligned} & H([g^{-1}ag, x]) \\ &= H((g^{-1}ag)^{-1}x^{-1}g^{-1}agx) \\ &= H(g^{-1}a^{-1}gx^{-1}g^{-1}agx) \\ &= H(g^{-1}a^{-1}gaa^{-1}(gx)^{-1}a(gx)) \\ &= H([g, a]\ [a, gx]) \\ &\geq H([g, a]) \wedge H([a, gx]) \\ &= H(e) \end{aligned} \quad (\forall x \in G)$$

であることから，

$$H([g^{-1}ag, x]) = H(e)$$

すなわち

$$g^{-1}ag \in C(H)$$

といえるので，

$$C(H) \triangleleft G$$

であることが示された。　　　　(Q.E.D.)

〔定理4.2〕

$$H \underset{\mathrm{Aut}(G)}{\sim} K$$

であるとき，

1）$C(H) \underset{\mathrm{Aut}(G)}{\sim} C(K)$

2）$N(H) \underset{\mathrm{Aut}(G)}{\sim} N(K)$

が成立する。

（証明）

1）について：定理2.4より，$C(H)$および$C(K)$はGの部分群であるので，

$$\exists \varphi \in \mathrm{Aut}(G) : \varphi(C(H)) = C(K)$$

であることを示せばよい。いま，定義3.1より

$$\exists \varphi \in \mathrm{Aut}(G) : H(x) = K(\varphi(x))$$
$$K(x) = H(\varphi^{-1}(x))$$
$$(\forall x \in G)$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "H"'] & & G \arrow[dl, "K"] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi^{-1}"] \arrow[dr, "K"'] & & G \arrow[dl, "H"] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd}$$

であることから，$\forall a \in C(H)$に対し，

$$\begin{aligned} & K([\varphi(a), x]) \\ &= K((\varphi(a))^{-1}x^{-1}\varphi(a)x) \\ &= K(\varphi(a^{-1})x^{-1}\varphi(a)x) \\ &= K(\varphi(a^{-1}\varphi^{-1}(x^{-1})a\varphi^{-1}(x))) \\ &= H(a^{-1}\varphi^{-1}(x^{-1})a\varphi^{-1}(x)) \\ &= H(a^{-1}(\varphi^{-1}(x))^{-1}a\varphi^{-1}(x)) \\ &= H([a, \varphi^{-1}(x)]) \\ &= H(e) \\ &= H(\varphi^{-1}(e)) \\ &= K(e) \end{aligned}$$
$$(\forall x \in G)$$

より

$$\varphi(a) \in C(K)$$

すなわち

$$\varphi(C(H)) \subseteq C(K)$$

であることがわかった。

逆に，$\forall a \in C(K)$に対し，

$$\begin{aligned} & H([\varphi^{-1}(a), x]) \\ &= H((\varphi^{-1}(a))^{-1}x^{-1}\varphi^{-1}(a)x) \\ &= H(\varphi^{-1}(a^{-1})x^{-1}\varphi^{-1}(a)x) \\ &= H(\varphi^{-1}(a^{-1}\varphi(x^{-1})a\varphi(x))) \\ &= K(a^{-1}(\varphi(x))^{-1}a\varphi(x)) \\ &= K([a, \varphi(x)]) \\ &= K(e) \\ &= K(\varphi(e)) \\ &= H(e) \end{aligned}$$
$$(\forall x \in G)$$

より

$$\varphi^{-1}(a) \in C(H)$$

すなわち

$$\varphi^{-1}(C(K)) \subseteq C(H)$$

ゆえに

$$C(K) \subseteq \varphi(C(H))$$

であることがわかった。

以上のことから

$$\exists \varphi \in \mathrm{Aut}(G) : \varphi(C(H)) = C(K)$$

が示された。

2）について：定理2.3より，$N(H)$および$N(K)$はGの部分群であるので，

$$\exists \varphi \in \mathrm{Aut}(G) : \varphi(N(H)) = N(K)$$

であることを示せばよい。このとき，

$$\exists \varphi \in \mathrm{Aut}(G) : H(x) = K(\varphi(x))$$
$$K(x) = H(\varphi^{-1}(x))$$
$$(\forall x \in G)$$

であることから，$\forall a \in N(H)$に対し，

$$\begin{aligned} & K(\varphi(a)x(\varphi(a))^{-1}) \\ &= K(\varphi(a\varphi^{-1}(x)a^{-1})) \\ &= H(a\varphi^{-1}(x)a^{-1}) \\ &= H(\varphi^{-1}(x)) \\ &= K(x) \end{aligned}$$
$$(\forall x \in G)$$

より

$$\varphi(a) \in N(K)$$

すなわち

$$\varphi(N(H)) \subseteq N(K)$$

であることがわかった。

逆に，$\forall a \in N(K)$に対し，

$$H(\varphi^{-1}(a)x(\varphi^{-1}(a))^{-1})$$
$$=H(\varphi^{-1}(a\varphi(x)a^{-1}))$$
$$=K(a\varphi(x)a^{-1})$$
$$=K(\varphi(x))$$
$$=H(x)$$
$$(\forall x \in G)$$

より

$$\varphi^{-1}(a) \in N(H)$$

であることから

$$a \in \varphi(N(H))$$

すなわち

$$N(K) \subseteq \varphi(N(H))$$

であることがわかった。

以上のことから

$$\exists \varphi \in \mathrm{Aut}(G) : \varphi(N(H)) = N(K)$$

が示された。

(Q.E.D.)

〔定理4.3〕

$H \in S(G_1)$, $K \in S(G_2)$に対し，

$$C(H) \times C(K) \subseteq C(H \times K)$$
$$N(H) \times N(K) \subseteq N(H \times K)$$

が成立する。特に，

$$G_1 = G_2,\ H(e) = K(e)$$

のとき，

$$C(H) \times C(K) = C(H \times K)$$

が成立する。

(証明) 明らかに

$$H \times K \in S(G_1 \times G_2)$$

であり，

$$(H \times K)(x_1, x_2) = H(x_1) \wedge K(x_2)$$
$$(\forall x_1 \in G_1, \forall x_2 \in G_2)$$

となる。このとき，

$$\forall a = (a_1, a_2) \in C(H) \times C(K) \subseteq G_1 \times G_2,$$
$$\forall x = (x_1, x_2) \in G_1 \times G_2,$$

に対し，

$$(H \times K)([a, x])$$
$$=(H \times K)([(a_1, a_2), (x_1, x_2)])$$
$$=(H \times K)([a_1, x_1], [a_2, x_2])$$
$$=H([a_1, x_1]) \wedge K([a_2, x_2])$$
$$=H(e_1) \wedge K(e_2)$$
$$=(H \times K)((e_1, e_2))$$

より

$$a \in C(H \times K)$$

であることから

$$C(H) \times C(K) \subseteq C(H \times K)$$

であることがわかる。

同様にして，

$$N(H) \times N(K) \subseteq N(H \times K)$$

であることも示される。

次に，

$$G_1 = G_2 = G,\ H(e) = K(e)$$

とするとき，

$$C(H \times K) \subseteq C(H) \times C(K)$$

であることを示そう。実際，

$$\forall a = (a_1, a_2) \in C(H \times K),$$
$$\forall x = (x_1, x_2) \in G \times G,$$

に対し，

$$H([a_1, x_1]) \wedge K([a_2, x_2])$$
$$=(H \times K)([a, x])$$
$$=(H \times K)(e)$$
$$=H(e) \wedge K(e)$$
$$=H(e)\ (=K(e))$$

であることから

$$H([a_1, x_1]) = H(e)$$
$$K([a_2, x_2]) = K(e)$$

といえるので，

$$a_1 \in C(H),\ a_2 \in C(K)$$

であり，したがって

$$a = (a_1, a_2) \in C(H) \times C(K)$$

すなわち

$$C(H \times K) \subseteq C(H) \times C(K)$$

であることが示された。

(Q.E.D.)

V　むすび

群Gの自己同形群$\mathrm{Aut}(G)$に関して同値なファジィ部分群という概念を導入し，その諸性質をファジィ中心化群やファジィ正規化群などと関連させて示した。その際，ファジィ部分群の族

によって生成されるファジィ部分群についても言及し，特性ファジィ部分群との関係も明らかにした。

これらのことがらが有限アーベル群や正規列とどのような関係をもっているかを調べるのは，今後の課題であろう。

参考文献

1）V.D. Dixit, R. Kumar and N. Ajmal, " Level Subgroups and Union of Fuzzy Subgroups ," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 37, 1990, pp. 359-371.

2）和泉孔二「ファジィ部分群およびファジィイデアルの諸性質」『阪南論集　社会科学編』第30巻第４号，1995年，139-147ページ。

3）和泉孔二「有限値をとるファジィイデアルの諸性質」『阪南論集　人文・自然科学編』第31巻第２号，1995年，15-23ページ。

4）和泉孔二「ファジィ正規部分群およびファジィイデアルのなす束について」『阪南論集　人文・自然科学編』第33巻第４号，1998年，１-９ページ。

5）和泉孔二「ファジィ左 R-加群のなす圏におけるファジィ分裂および射の可逆性」『阪南論集　社会科学編』第35巻第２号，1999年，89-98ページ。

6）近藤武『群論』岩波書店，1991年。

7）W. Liu, " Fuzzy Invariant Subgroups and Fuzzy Ideals ," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 8, 1982, pp. 133-139.

8）森田康夫『代数概論』裳華房，1987年。

9）A. Rosenfeld, " Fuzzy Groups ," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 35, 1971, pp. 512-517.

10）H. Sherwood, " Products of Fuzzy Subgroups ," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 11, 1983, pp. 79-89.

11）Y. Zhang and K. Zou, " A Note on an Equivalence Relation on Fuzzy Subgroups ," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 95, 1998, pp. 243-247.

12）Y. Zhang, " Some Properties on Fuzzy Subgroups ," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 119, 2001, pp. 427-438.

（2001年12月14日受理）