2人協力ゲームの解について

前　野　冨士生

目　次

はじめに

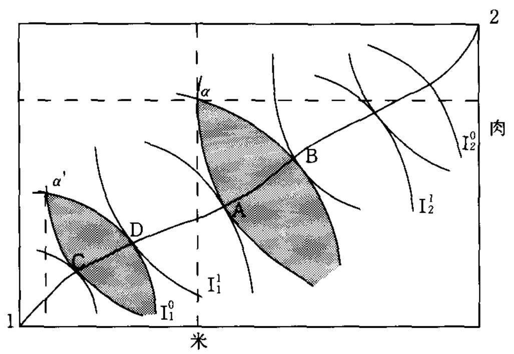
本稿では2人協力ゲームでのNash（1950）の交渉モデルと基本的には同じゲームの情況ではあるが、Nashによって提示されたものとは異なるKalai-Smorodinskyモデルをとりあげ，交渉解の比較を行う。いづれのモデルともプレイヤー間で拘束力のある合意が必要とされる。合意には公平さが必要とされるが，この公平さを表わすのにいくつかの公理が要請される。

両モデルとも解の導出にとってポイントとなるのは威嚇点（threat point）であるが，この威嚇点ないしは基準点（reference point）をどのように決めるかが問題となる。Thomson（1981）はNashの提示した公理に沿っていくつかの基準点を提示しているが，我々はThomsonが提示した以外の新しい基準点を求め，それによる解はどのような性質をもっているかを検討する。

Ⅰ　Edgeworthの解

2人交渉解はEdgeworth（1881）によるボックス・ダイヤグラムの解で知られる。今図1のようにボックスの左下端をプレイヤー1の原点，右上端をプレイヤー2の原点とする。プレイヤー1の無差別曲線をI_1^0，I_1^1…とし，プレイヤー2のそれをI_2^0，I_2^1…とする。両者の米と肉の初期保有量をα点とする。

図1　Edgeworrth　ボックス・ダイヤグラム

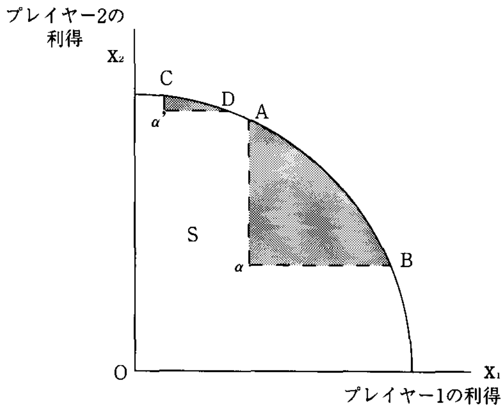


両者の交渉によってより満足度の高い財束を達成することが可能となる。αから交渉を始めてより満足度が高くなる領域は図1の影の部分である。曲線AB上はコアとよぶ。取引をすれば両者にとってより望ましいのはコア上である。曲線1－2を利得可能フロンティアとよび，取引集合を表わす。このフロンティアはまたパレート最適とよぶ。初期保有量が図のα'のように一方のプレイヤーに片寄った場合も取引をすることでより望ましい点に到達することが可能であるが，その場合，もてるもののエゴを発揮するとC点になり，もてるものが寛容さを示すとD点になる。交渉によって2人に有利な曲

線CD上に解を得ることができる。

Edgeworthの取引分析は協力ゲームへの重要な橋頭堡となった。Edgeworthのボックス・ダイヤグラムを図２のように横軸をプレイヤー１の利得，縦軸をプレイヤー２の利得とする。Sは達成可能集合とよび，２人のプレイヤーが協力すれば達成できる利得の組の集合を表わす。利得の組のより望ましい領域は図２の影の部分である（個人合理性)。AB曲線上はコアであり(全体合理性，パレート最適性を満たす)，αは初期保有量を表わす。

図２　固定威嚇ゲームでの達成可能利得



Edgeworthの解はコアの中にあり，パレート最適性を要請することより全体合理性を満たしている。また初期保有量から出発して取引を行うことで，取引のない場合より望ましくない結果には合意しないという意味で個人合理性を満足している。

このようにEdgeworthの解は取引問題に対して魅力ある解を提示したが，その解はコアで示された。コアは一般に１点とは限らない。これに対してEdgeworthから発展するNash解は１意に決まる。次にNashの２人協力ゲームについて検討する。

Ⅱ．Nashの解

２人協力ゲームはNashによって定式化された[1]。Nashは達成可能集合を上のように$S\in R^2$で示し，利得点$x=(x_1,x_2)\notin S$であれば２人のプレイヤーにとって達成不可能であり，$x\in S$であれば協力して達成できるとした。各個人が協力しなくても達成できる利得点を威嚇点とよび$\alpha\in S$で表わす。

まずNashによる２人協力ゲームをFriedmanに従って形式的に記述する[2]。

定議１．$\Gamma=(\alpha,S)$ を２人固定威嚇交渉ゲームとする。$S\subset R^2$はコンパクトで凸であり[3]，$\alpha\in S$である。Sは$x\geq\alpha$となるxを少くとも１つ含む。

定義２．２人固定威嚇交渉ゲームの集合をZで表わす。

交渉ゲームによって導出される特定の解概念をゲームの関数として書く。

定義３．$\Gamma\in Z$に対する解は$\Gamma\in Z$のSの１意の要素に関する関数$f(\alpha,S)$である。

$f(\alpha,S)=(f_1(\alpha,S),\ f_2(\alpha,S))$

次にNash解を定義している公理ないしは関数$f(\alpha,S)$のもつべき性質を示す。

公理１．個人合理性

すべての$(\alpha,S)\in Z$に対して$f(\alpha,S)\geq\alpha$.

交渉は２人のプレイヤーにとって望ましいものでなければならない。そうでないと交渉は成立しない。

公理２．アフィン変換による不変性

$c_1,c_2\in R_{++}$，d_1，$d_2\in R$，かつ

(α,S)，$(\alpha',S')\in Z$

$\alpha'_i=c_i\alpha_i+d_i$，$i=1,\ 2$

$S'=\{x\in R^2 \mid x_i=c_iY_i+d_i,\ i=1,2,\ y\in S\}$

このとき，$f_i(\alpha',S')=c_if_i(\alpha,S)+d_i$

$i=1,\ 2$

正のアフィン変換によっても選択結果に影響を与えないこと。すなわち，利得を測定する尺度を変えても評価は変わらないことをいみする。

公理３．対称性

もし$(\alpha,S)\in Z$が$\alpha_1=\alpha_2$，かつ$(x_1,x_2)\in S$であれば，$(x_2,x_1)\in S$であるとき$f_1(\alpha,S)=f_2(\alpha,S)$.

達成可能集合Sが原点からの45°線について対称であり，$\alpha_1=\alpha_2$であるなら，2人のプレイヤーの解は等しい。

公理4．無関係な選択肢からの独立性

(α, S)，$(\alpha', S') \in Z$，$\alpha=\alpha'$，$S \subset S'$

でかつ$f(\alpha', S') \in S$であれば

$f(\alpha, S)=f(\alpha', S')$，

2つのゲームの威嚇点が同じで，より大きなゲームの解が小さなゲームの達成可能集合に含まれておれば，より大きなゲームの解は小さなゲームの解にもなっている。

公理5．パレート最適性

$x>f(\alpha, S)$なら$x \notin S$

2人のプレイヤーにとってより望ましい点がある限り取引は続けられ，解はSの右上方境界でなければならない。$f(\alpha, S)$より多くを与えるような点はSに存在しない[4]。

以上公理1～5を満たすNash解を定理として述べる。

定理1．ゲーム$(\alpha, S) \in Z$は公理1～5を満足する1意のNash解$x^*=f(\alpha, S) \in S$をもつ。解x^*が公理1～5を満足することと，すべての$x \in S$，$x \geq \alpha$かつ$x \neq x^*$に対して

$(x_1^*-\alpha_1)(x_2^*-\alpha_2)>(x_1-\alpha_1)(x_2-\alpha_2)$であることは同値である[5]。

定理1の意味を図3で示す。

Sの斜線部分は個人合理的であり，αを通る両軸に漸近的である直角双曲線は積

$(x_1-\alpha_1)(x_2-\alpha_2)$

が一定である曲線である。協力によって得られる利得が最大化されるSの点は，Sの右上方とαを通る両軸に漸近的な直角双曲線との接点であり，αの右上方にあってSの部分であるNash積 $(x_1-\alpha_1)(x_2-\alpha_2)$ は1意の最大値x^*をもつ。

Ⅲ　Kalai-Smorodinskyモデルの定式化[6]

次にNashに類似のモデルを検討する。以下

図3　Nash解

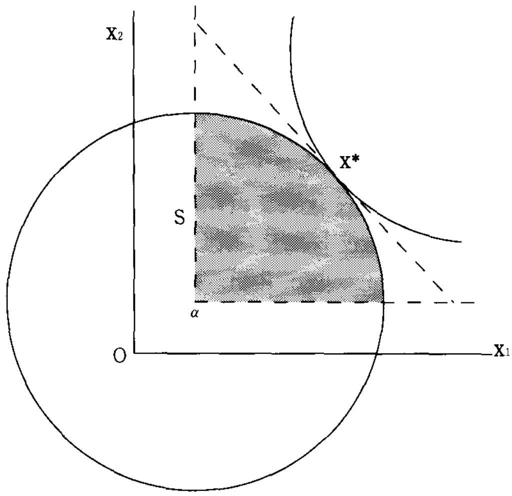
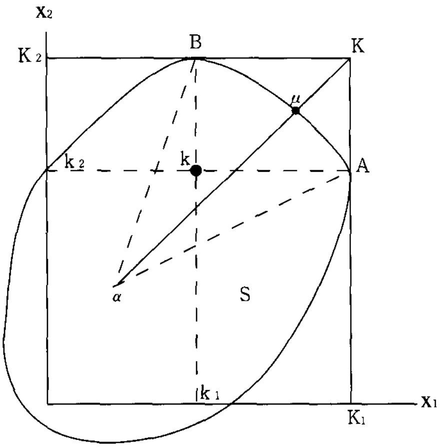


図4　KS解



のモデルはRaiffa[7]によって提示され，Kalai-Smorodinskyによって公理化された。

Nashモデルと同様，ゲームは定義1，2の(α, S)で特徴づけられる。解概念は図4を用いて説明する。点Aはプレイヤー1がK_1の利得を得る点で，K_1は個人合理的であるSの中でプレイヤー1の最大利得を表わす。K_1が大きくなるほどプレイヤー1にとってより多くの利得を得ることになる。点BとK_2はプレーヤー2にとって同様に定義する。

点$K=(K_1, K_2)$は一般に達成可能集合Sを超えたところにあり，理想点（ideal point）とよ

ぶ。αとKを結ぶ直線を考え，この直線が利得可能フロンティアと交わる点μが解として得られる。この解をKS解とよぶ。

この解を定式化すれば次のようになる。Nash解が満たす公理1～3と公理5を満足し，さらに次のように定義する。

$K_1(\alpha, S)=\max\{x_1\in R \mid (x_1,x_2)\in S$かつ$x_2\geq \alpha_2\}$
$k_2(\alpha, S)=\max\{x_2\in R \mid (K_1(\alpha, S), x_2)\in S\}$
$K_2(\alpha, S)=\max\{x_2\in R \mid (x_1,x_2)\in S$かつ$x_1\geq \alpha_1\}$
$k_1(\alpha, S)=\max\{x_1\in R \mid (K_2(\alpha, S),x_1)\in S\}$

$K_1(\alpha,S)$はプレイヤー2が少なくともα_2を得るもとでプレイヤー1がSで得る最大利得を表わし，$k_2(\alpha,S)$はプレイヤー1が$K_1(\alpha,S)$を得るとき，プレイヤー2が得る利得を表わす[8]。

定義4．$K(\alpha,S)=(K_1(\alpha,S),\ K_2(\alpha,S))$を理想点（ideal point）とよぶ。

定義5．$k(\alpha,S)=(k_1(\alpha,S),\ k_2(\alpha,S))$は最小期待の点（the point of minimal expectation）とよぶ。

KS解は公理1～3と公理5，さらに公理4の代わりに公理6が要請される。

公理6．単調性
(α,S)と(α',S')という2つのゲームは
(a) $\alpha=\alpha'$
(b) $K_1(\alpha_1,S)=K_1(\alpha',S')$
(c) $S\subset S'$
の条件を満たすとき
$f_2(\alpha,S)\leq f_2(\alpha',S')$である。
公理6を図5で示す。

Sは$OK_1\mu Y$で，S'は$OK_1\mu' Y'$であるとき，SとS'ともK_1は同じであるが可能領域がプレイヤー2に有利になれば交渉解もプレイヤー2が有利となることを示している[9]。

ここでNash解が公理6を満たさない場合を示す。図6により，SとS'に対して威嚇点をαとする。

$S=\alpha QNR$，$S'=\alpha QN'R$とすれば，$K_1(\alpha,S)=K_1(\alpha',S')$かつ$S\subset S'$である。曲線TとT'は$(x_1-\alpha_1)(x_2-\alpha_2)$が一定となる直角双曲線である。$(\alpha,S)$に対するNash解はNで$(\alpha',S')$に対するNash解はN'でプレイヤー2は$(\alpha,S)$より$(\alpha',S')$の方がより少ない利得を得ることになり，公理6に矛盾する。

図5 公理6

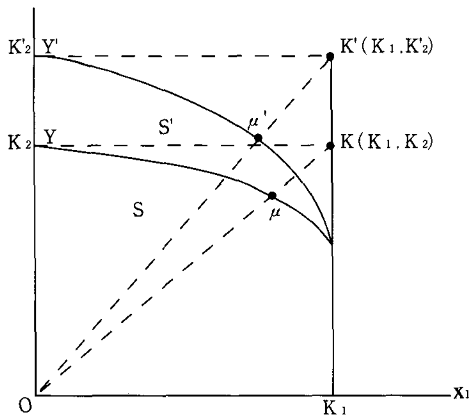
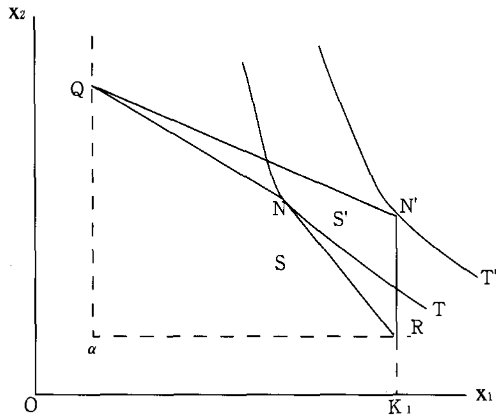


図6 Nasy解は公理を満たさない



さらにKS解は次の2つの条件を必要とする。

(a) $$\frac{f_2(\alpha, S)-\alpha_2}{f_1(\alpha, S)-\alpha_1}=\frac{K_2(\alpha, S)-\alpha_2}{K_1(\alpha, S)-\alpha_1} \quad (1)$$

(b) $$\frac{x_2-\alpha_2}{x_1-\alpha_1}=\frac{K_2(\alpha, S)-\alpha_2}{K_1(\alpha, S)-\alpha_1} \quad (2)$$

かつ，$x>f(\alpha,S)$であるなら，$x\notin S$である。条件(a)は各プレイヤーの利得は理想点$K=(K_1,K_2)$での利得に比例して獲得できることを示す。

条件(b)は比例定数 x_i(i＝1,2)が実行可能集合内で達成できる最大値であることを示す。

Ⅳ　KS解の存在

KS解は条件(a)と(b)を満たす関数f(α ,S)が定義されて，しかも，公理1～3と公理5～6を満足する唯一の関数である。これは次の補題1，2を用いて定理2で与えられる。

補題1．αを通る非負の傾きをもつ半直線がSのパレート最適点を通るためには次式が必要十分となる。すなわち，その半直線の勾配が（3）式の区間にあることである。

$$\left[\frac{k_2(\alpha,S)-\alpha_2}{K_1(\alpha,S)-\alpha_1},\frac{K_2(\alpha,S)-\alpha_2}{k_1(\alpha,S)-\alpha_1}\right] \quad (3)$$

証明：Sは凸でコンパクトであるから図4の直線αBより急な勾配をもつ直線は $x_1 \leq k_1(\alpha,S)$ と $x_2 \leq K_2(\alpha,S)$ のある点でのみSの右上方境界と交わる。したがって，このような$x=(x_1,x_2)$はパレート最適ではない。同様に直線αAより勾配の小さい直線もパレート最適でない点に対応する。

補題2．(1)(2)式によって定義される関数f(α ,S)は，あらゆる(α ,S)に対して1意の値をもち，Sのパレート最適点に対応する。

証明：f(α ,S)は勾配［$K_2(\alpha,S)-\alpha_2$］／［$K_1(\alpha,S)-\alpha_1$］でαを通る直線上にあるSの点である。この勾配は（3）式の区間にある。したがって，この半直線はSのパレート最適領域の1点を通る。

定理2　関数f(α ,S)は公理1～3と公理5～6を満足する唯一の関数である。

証明略[10)]

ここでKS解とNash解を比較してみる。まずNash解は公理4によって同じ威嚇点をもつ2つのゲーム(α ,S)と(α',S')，$\alpha=\alpha'$，S⊂S'は同じ解をもつことが示された。これに対してKS解は公理6によって，同じ威嚇点をもつ2つのゲーム(α ,S)，(α',S')と$K_1(\alpha,S)=K_1(\alpha',S')$で$K_2(\alpha,S)$が増加すると解はプレイヤー2に有利になることが示された。Nash解はゲームの変化は解に影響を与えないが，KS解は特定のプレイヤーの利得を増加させることが示された。

Ⅴ　基準点に基づくゲームの解の存在と1意性

Nash解であれ，KS解であれ威嚇点に従属して解が導出された。Thomsonはこの威嚇点と最小期待の点kの凸1次結合をつくる。すなわち，

$$h(\alpha,S)=\beta\alpha+(1-\beta)k(\alpha,S) \quad (4)$$

このh(α ,S)を基準点とする。基準点h(α ,S)はαについては次の条件1，2を満足することが必要である。

条件1．アフィン変換によって2つのゲーム(α ,S)と(α',S')が関連づけられるとき，その基準点も同じアフィン変換によって関連づけられる。

$$S'=\{x\in R_2 \mid x_i=a_iy_i+b_i \ i=1,2 \quad y\in S\}$$

$$a_i>0_i, \qquad b_i\in R$$

$$\alpha'_i=a_i\alpha_i+b_i$$

このとき，$h_i(\alpha',S')=a_ih_i(\alpha,S)+b_i$　$i=1,2$

条件2　ゲーム(α ,S)はもしもとのゲーム(α ,S)が完全に対称であるなら，ゲーム(α ,S)は次のようにして対称ゲーム(α',S')に拡大されることができる。すなわち同じ基準点$(h(\alpha,S)=h(\alpha',S'))$をもつ2つのゲームと$(x_1-h_1(\alpha,S))(x_2-h_2(\alpha,S))$がSで最大化されるその同じ点x*で$(x_1-h_1(\alpha',S'))(x_2-h_2(\alpha',S'))$がS'上で最大化される。

条件1，2よりhは2つのゲーム(α ,S)と(α',S')に対して1次変換の条件と対称性をみたす。この基準点hをもつゲームに対しては次の定理が成立する。

定理3．条件1，2を満足する基準点関数に関するゲームを(α,S)とする。このとき(α,S)は1意の解$x^*=f(\alpha,S)$をもつ。すなわち，すべての$x\in S$, $x\geq h(\alpha,S)$,　$x\neq x^*$に対して$(x_1^*-h_1(\alpha,S))(x_2^*-h_2(\alpha,S))>(x_1-h_1(\alpha,S))(x_2-h_2(\alpha,S))$である。

証明略[11]

以下　Thomsonによりいくつかの基準点を示し，それに従属して解を求める[12]。

Thomsonは条件1，2を満足する次の(a) (b) (c) の基準点を提示する。

(a)最小期待の点k

$$k=(k_1,\ k_2)$$

(b)最小妥結の点c

$$c=\left(\frac{K_1(\alpha,S)+k_1(\alpha,S)}{2},\ \frac{K_2(\alpha,S)+k_2(\alpha,S)}{2}\right)$$

(c)最小長方形の中心m

$$m=(m_1,\ m_2)$$

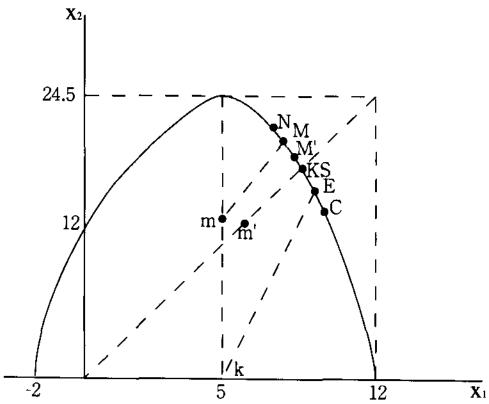
Ⅵ　例題による解の比較

以下ではThomsonによって提示された基準点を（5）式の関数を用いて検討し解の導出を試みる。

$$x_2=12+5x_1-\frac{1}{2}x_1^2 \qquad (5)$$

（5）式のグラフ上かそれ以下の領域とx_1軸で囲まれた領域を達成可能領域Sとする。図7参照

図7　ゲーム1



（5）式より$x_2=0$のとき$x_1=-2$，12

$\frac{dx_2}{dx_1}=5-x_1=0$より$x_1=5$のとき$x_2=24.5$

これよりThomsonの基準点は次のようになる。

最小期待の点k

$k_1(\alpha,S)=\max\{x_1\in R\,|\,K_2(\alpha,S),x_1)\in S\}=5$

$k_2(\alpha,S)=\max\{x_2\in R\,|\,K_1(\alpha,S),x_2)\in S\}=0$

より　$k=(k_1,\ k_2)=(5,0)$

最小妥結点c

$$c=\left(\frac{K_1+k_1}{2},\frac{K_2+k_2}{2}\right)=\left(\frac{12+5}{2},\ \frac{24.5+0}{2}\right)=(8.5,12.25)$$

最小長方形の中心m

$$m=(m_1,m_2)=\left(\frac{-2+12}{2},\frac{24.5+0}{2}\right)=(5,12.25)$$

次に上の基準点に基づく解をそれぞれ導出する。ただし，Nash解を求める基準点とKS解を求める基準点は原点とする。

Nash解

$$x_1x_2=x_1(12+5x_1-\frac{1}{2}x_1^2)=12x_1+5x_1^2-\frac{1}{2}x_1^3 \quad (6)$$

$$\frac{d(x_1x_2)}{dx_1}=12+10x_1-\frac{3}{2}x_1^2=0$$

$x_1=7.70$

$x_2=20.855$　　$N=(7.70,\ 20.855)$

KS解

（0，0）と（12, 24.5）を通る直線の方程式は

$$x_2=\frac{24.5}{12}x_1 \qquad (7)$$

KS解は（7）と（5）の交点で求められる。

$x_1=8.68$

$x_2=17.73$　　　$KS=(8.68,\ 17.33)$

最小期待$k=(5,\ 0)$を基準点とする解E

$$k=(x_1-5)(x_2-0)=(x_1-5)(12+5x_1-\frac{1}{2}x_1^2) \quad (8)$$

$$\frac{dk}{dx_1}=-13+15x_1-\frac{3}{2}x_1^2=0 \qquad (9)$$

$x_1=9$

$x_2=16.5$　　　$E=(9,\ 16.5)$

最小妥結点c（8.5，12.25）を基準点とする解c

$$c=(x_1-8.5)(x_2-12.25)=(x_1-8.5)(12+5x_1-\frac{1}{2}x_1^2-12.25) \quad (10)$$

$$\frac{dc}{dx_1}=\frac{3}{2}x_1^2-18.5+42.75=0 \quad (11)$$

$x_1=9.25$

$x_2=15.47$　　　C＝（9.25，15.47）

最小長方形の中心m（5，12.25）を基準点とする解M

$$m=(x_1-5)(x_2-12.25)=(x_1-5)(12+5x_1-\frac{1}{2}x_1^2-12.25) \quad (12)$$

$$\frac{dm}{dx_1}=\frac{3}{2}x_1^2-15x_1+25.25=0 \quad (13)$$

$x_1=7.86$

$x_2=20.41$　　　M＝（7.86，20.41）

Ⅶ　正領域中点基準点とそれに基づく解

ところで（5）式では最小長方形の中心m（m_1，m_2）はプレイヤー1のみがマイナスの領域をもち，プレイヤー2の領域は非負である。そこでゲームの交渉領域を正の領域として，正領域での長方形の中心の基準点m'を考えると次のようになる。

(d) 正領域中点基準点 $m'=(m'_1, m'_2)=(\frac{K_1}{2}, \frac{K_2}{2})$

(d) の基準点を求めると

$$(\frac{K_1}{2}, \frac{K_2}{2})=(6, 12.25)$$

これを基準点としてNash積の最大化を求める。

$$m'=(x_1-m'_1)(x_2-m'_2)=(x_1-6)(12+5x_1-\frac{1}{2}x_1^2-12.25) \quad (14)$$

$$\frac{dm'}{dx_1}=-\frac{3}{2}x_1^2+16x_1-30.25=0 \quad (15)$$

$x_1=8.21$

$x_2=19.35$　　　M'＝（8.21，19.35）

以上，　$x_2=12+5x_1-\frac{1}{2}x_2$ に対する基準点と解を表1に表わす。

表1

解の名前＼プレイヤー	基準点 プレイヤー1	基準点 プレイヤー2	解 プレイヤ-1	解 プレイヤー2
Nash.（N）	0	0	7.70	20.855
KS	0	0	8.68	17.73
最小期待（E）	5	0	9	16.5
最小妥結（C）	8.5	12.25	9.25	15.47
最小長方形（M）	5	12.25	7.86	20.41
NKS（M'）	6	12.25	8.21	19.35

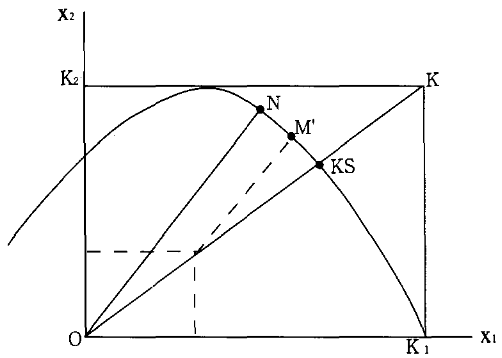
ところで，KS解を求めた（5）式はプレイヤー2の領域の最大値はx_2＝24.5であり，プレイヤー1の領域の最大値はx_1＝12である。すなわち，原点とこの利得点K(12，24.25)を結ぶ直線の傾きは24.5/12であり，一方正領域中点基準点はm'＝（6，12.25）となる。このことは原点を基準点としてKS解を求める直線上にm'が必ず存在することである。このようにm'はKS解を求める直線上にあり，このm'を基準点としてNash積の最大化を解として求めることより，この解をNKS解とよぶ。NKS解は表より明らかなようにKS解よりもフロンティア曲線上の左上方に位置し，Nash解よりも右下方のフロンティア上に位置する。したがって次の命題が成立する。

命題・正領域中点基準点解（NKS解）はNash解とKS解の間に存在する。

この命題は次のように証明できる。2人ゲームで威嚇点を原点として図8のようにNash解NがKS解よりフロンティア上の左上方にくるとする。このことはNash解はKS解よりプレイヤー2にとっては大きく（プレイヤー1にとっては小さく）なることである。

このことは直線O-KS上（KS点は除く）の任意の点を基準点にとると，この基準点によるすべてのNash積の最大化解はKSより左上方にくることをいみする。また直線ON上に基準点をとると，すべてのNash積の最大化解はNと1致する。したがって，正領域中点基準点は，威嚇点を原点とした場合，直線O-KS上にその基

図8　正領域中点基準点解



準点がくるので，NKS解（図８ではM'）はNとKSの間に位置することになる。KS点より右下方のフロンティア上にNがくる場合も同様にして，M'はKSとNの間に存在する。これより正領域中点基準点解は常にNash解とKS解の間に存在することが証明される。

ところで（５）式の関数を用いてゲームをもう１つ作る。もとのゲームをゲーム１とする。

この曲線の勾配は

$$\frac{dx_2}{dx_1}=5-x_1 \tag{16}$$

$x_1=6$ から $x_1=10$ に（５）式を限定する。$x_1=6$ のとき $x_2=24$。さらに（16）式より $5-x_1=5-6=-1$ となる

これより　T(６，24) を通り傾き－１の直線は

$$x_2=-x_1+30 \tag{17}$$

縦軸と（17）の交点は30となる。公理２によって（５）式のゲームを上のようにして新しくつくる。こうして作られたゲームをゲーム２とする。このゲーム２とゲーム１を比較してみる。ゲーム２は図９のようになる。

プレイヤー２の利得の最大値は30となり，ゲームの達成可能領域S'はABTFOで表わされる。

ゲーム２の基準点は以下のようになる。

理想点K(10，30)

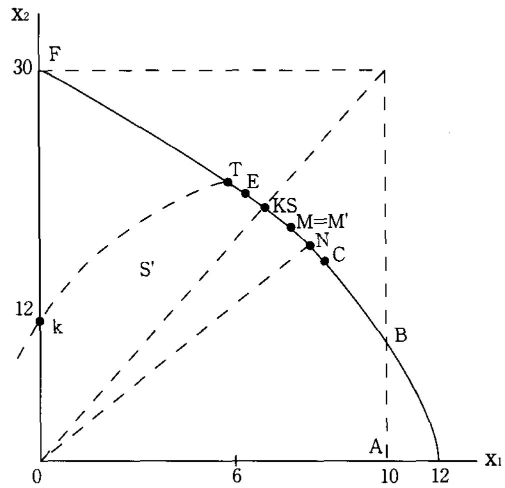
最小期待の点k＝（０，12）

最小妥結の点c＝（５，21）

最小長方形の点m＝（５，15）

正領域中点m'＝（５，15）

図9　ゲーム2



上で求めた基準点に基づく解を求める。ゲーム１と同様威嚇点は原点とする。

Nash解

$$x_1x_2=x_1(12+5x_1-\frac{1}{2}x_1^2)$$

$$\frac{d(x_1x_2)}{dx_1}=0 \text{ より}$$

$x_1=7.70$

$x_2=20.855$　　N＝（7.70，20.855）

KS解

原点と（10，30）を通る直線は

$$x_2=3x_1 \tag{18}$$

KS解は（18）式と（５）式の交点で求められるから

$x_1=7.29$

$x_2=21.87$　　KS＝（7.29，21.87）

最小妥結c＝(５，21) の解C

$$c=(x_1-c_1)(x_2-c_2)=(x_1-5)(12+5x_1-\frac{1}{2}x_1^2-21)$$

$$\frac{dc}{dx_1}=-\frac{3}{2}x_1^2+15x_1-16=0$$

$x_1=8.79$

$x_2=17.32$　　C＝（8.79，17.32）

最小期待の点k（０，12）の解E

$$k=(x_1-0)(x_2-12)=(x_1-0)(12+5x_1-\frac{1}{2}x_1^2-12)$$

$$\frac{dk}{dx_1}=10x_1-\frac{3}{2}x_1^2=0$$

$x_1=6.67$

$x_2=23.11$　　E＝（6.67，23.11）

最小長方形の中点m（5,15）の解M

$$m=(x_1-5)(x_2-15)=(x_1-15)(12+5x_1-\frac{1}{2}x_1^2-15)$$

$$\frac{dm}{dx_1}=-\frac{3}{2}x_1^2+15x_1-28=0$$

$$x_1=7.51$$

$$x_2=21.35 \qquad M=(7.51,\ 21.35)$$

正領域中点m'（5，15）の解M'
S'が正領域のみであるからm'=mとなり
解もM'=M=（7.51，21.35）となる。
ゲーム2の解を表2にまとめる。

表2

プレイヤー ＼ 解の名前	基準点		解	
	プレイヤー1	プレイヤー2	プレイヤー1	プレイヤー2
N	0	0	7.70	20.855
KS	0	0	7.29	21.87
k(E)	0	12	6.67	23.71
c(C)	5	21	8.79	17.32
m(M)	5	15	7.51	21.35
m'(M')	5	15	7.51	21.35

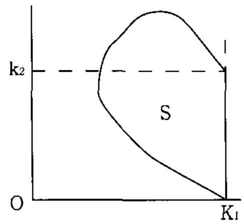
ゲーム1とゲーム2を比較すると，ゲーム1はN点がフロンティア上の一番左上にくるが，ゲーム2ではE点が一番左上にきている。KS解に関しては，プレイヤー2の達成可能領域Sが大きくなってS'となった結果，ゲーム1に比べてプレイヤー2の解が大きくなっている。さらにゲーム2でも，正領域中点基準点解はNash解とKS解の間に位置することが確認される。

むすび

2人協力ゲームでのNash解とKS解を検討した。Nash解の特徴として公理4によるS⊂S'でS'のゲームの解がSの中の点であれば，Sのゲームの解にもなっていることが例題でも確認された。一方KS解は達成可能領域が大きくなると解も大きくなる（公理6）ことが示された。さらに我々の求めた正領域中点基準点によれば，パレート最適集合上のKS解とNash解の間につねに存在するという興味ある結果が得られた。一般に2人のプレイヤーの達成可能領域を考えた場合は，一方のプレイヤーのみが負の達成可能領域をもつのは現実的ではない。可能領域が2人のプレイヤーとも負の領域を含んでいたとしてもゲームの交渉領域はプラスの領域であると考えるのが望ましい。

注

1）Nash［4］
2）Friedman［1］
3）もしゲームの2つの結果がSにおいてxとyであればこれら2つの結果に対して共同混合戦略をとることはxとyのあらゆる凸1次結合の点を表わすことができることである。
4）パレート最適性は公理1から公理4により導出される。証明はRoth［5］　Friedman［1］
5）証明Friedman［1］p.215　鈴木［7］pp.145-150
6）Kalai-Smorodinsky［2］
7）Raiffa［3］
8）もし$K_1(\alpha,S)$に対する利得が1意でないなら，このとき$k_2(\alpha,S)$は対応する利得の最大値とする。
Sが図のようであればK_1に対するのはk_2である。



9）単調性とはゲームの達成可能領域が大きくなる方のプレイヤーはそうでないプレイヤーに比べて交渉解（KS解）も有利になることをいみする。
10）Kalai-Smorodinsky［2］p.516　Friedman［1］p.222.
11）Friedman［1］p.225.
12）基準点の導出にもいくつかの公理が要請される。特に1次変換（アフィン変換）による独立性の公理が重要となる。Thomson［6］

参考文献

[1] Friedman, J.W., 1990. *Game Theory with Application to Economics*. Second Edition. Oxford Univevisity press.
[2] Kalai.E, and Smorodinsky.M., 1975, “Other Solution to Nash's Bargaining problem”, *Econometrica* 43, pp.513-18.
[3] Luce. R.D., and H.Raiffa：1957. *Games and Decisions*. New York：Willey.

[4] Nash.J.F.,1950. "The Bargaining problem" *Econometrica* 18.
[5] Roth,H.,1977 "Individual Rationality and Nash's Solution to the Bargaining Problem." *Mathematics of Operations Research* 2. pp.64-66.
[6] Thomson, W.,1981. "A class of Solutions to Bargaining problem." *Journal of Economic Theory* 25 : pp.431-41.
[7] 鈴木光男1981.『ゲーム理論入門』共立出版。

(1996年12月4日受理)