

# 比較静学に関する一研究

## — 均衡値の変動 —

前 野 富 士 生

### はじめに

本稿では静学的な均衡分析によって企業の行動理論を定式化して、企業の最適化行動を分析することを目的とする。そして最適化の比較静学を分析の対象とする。すなわち、パラメーターの変化によって独立変数（内生変数）の最適値あるいは目的関数の最適値がどのような影響を受けるかを検討する<sup>(1)</sup>。

### 〔I〕 最適内生変数の変動

完全競争のもとでは、通常生産された財は必ず需要される。すなわち生産量と需要量は等しいという仮定でモデルが作成される。これに対して、不完全競争のもとでは、生産されたものが必ず需要されるとは限らず、したがって生産量と需要量は常に等しいとは限らない。しかし我々のモデルでは、不完全競争においてもある条件の下で生産関数の値と需要関数の値が等しくなるという仮定を置いて、最適値を導出する。

まずモデルの簡単化のため、生産関数  $f(\cdot)$  の内生変数は労働と資本のみを考え、この生産関数の値に等しくなる需要関数  $g(\cdot)$  を考えるため、価格をパラメータとし、広告を変数とする。すなわち需要関数に広告費を入れることによって  $f(\cdot)$  と  $g(\cdot)$  の2つの関数値は等しくなることを前提とする<sup>(2)</sup>。

モデルを定式化すると、

$$f(l, k) = g(p, a) \quad (1-1)$$

$$\pi = pf(l, k) - wl - rk - da \quad (1-2)$$

ただし  $\pi$  = 利潤,  $l$  = 労働,  $k$  = 資本,  $a$  = 広告,  $p$  = 生産物価格,  $w$  = 賃金,  $r$  = 資本財価格,

$d$  = 広告の価格

$l, k, a$  は内生変数

$p, w, r, d$  はパラメーター

(1) 以下の分析の基本は〔6〕〔7〕。

(2) 〔4〕, 〔5〕, 〔8〕。

であるとする。

(1-1) の制約の下で目的関数 (1-2) の最大化という問題を考える。このための1階の必要条件は、ラグランジュ関数を  $L$  とすると、

$$L = pf(l, k) - wl - rk - da + \lambda(f(l, k) - g(p, a)) \quad (1-3)$$

を  $l, k, a, \lambda$  に関して偏微分したものをゼロとおくことによって得られる。

ただし  $\lambda$  はラグランジュ乗数をあらわす。

$$\begin{aligned} L_1 = pf_1 - w + \lambda f_1 &= 0 & f_1 > 0 \left( \frac{\partial f}{\partial l} = f_1 \right) \\ L_2 = pf_2 - r + \lambda f_2 &= 0 & f_2 > 0 \left( \frac{\partial f}{\partial k} = f_2 \right) \\ L_a = -d - \lambda g_a &= 0 & g_a > 0 \left( \frac{\partial g}{\partial a} = g_a \right) \end{aligned} \quad (1-4)$$

$$L_\lambda = f(l, k) - g(p, a) = 0 \quad \text{ただし, } \frac{\partial L}{\partial l} = L_1, \frac{\partial L}{\partial k} = L_2, \frac{\partial L}{\partial a} = L_a, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = L_\lambda.$$

最大化を保障する2階の十分条件が満足されていると仮定すれば陰関数定理によって、(1-4) を解いて  $l, k, a, \lambda$  をパラメーター  $w, r, d, p$  の関数として表わすことができる<sup>(3)</sup>。

$$\begin{aligned} l &= l^*(w, r, d, p) \\ k &= k^*(w, r, d, p) \\ a &= a^*(w, r, d, p) \\ \lambda &= \lambda^*(w, r, d, p) \end{aligned} \quad (1-5)$$

この(1-5)式をもとの(1-4)式に代入すれば恒等式が得られる。

$$pf_1(l^*, k^*) - w + \lambda^* f_1(l^*, k^*) = 0 \quad (1-6)$$

$$pf_2(l^*, k^*) - r + \lambda^* f_2(l^*, k^*) = 0 \quad (1-7)$$

$$-d - \lambda^* g_a(p, a^*) = 0 \quad (1-8)$$

$$f(l^*, k^*) - g(p, a^*) = 0 \quad (1-9)$$

ここでパラメーター  $w$  が変化したとき、最適値  $l^*, k^*, a^*, \lambda^*$  へ与える影響を調べる。

(1-6) より

(3) [9] p. 27 [2] p. 421. (1-4) を  $F^j(l, k, a, \lambda; w, r, a, p) = 0$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) の形にしそれが連続的な偏導関数をもつと仮定することによって次の内生変数によるヤコビアン

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial l} & \frac{\partial F^1}{\partial k} & \frac{\partial F^1}{\partial a} & \frac{\partial F^1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial F^2}{\partial l} & \frac{\partial F^2}{\partial k} & \frac{\partial F^2}{\partial a} & \frac{\partial F^2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial F^3}{\partial l} & \frac{\partial F^3}{\partial k} & \frac{\partial F^3}{\partial a} & \frac{\partial F^3}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial F^4}{\partial l} & \frac{\partial F^4}{\partial k} & \frac{\partial F^4}{\partial a} & \frac{\partial F^4}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pf_{11} + \lambda f_{11} & pf_{12} + \lambda f_{12} & 0 & f_1 \\ pf_{21} + \lambda f_{21} & pf_{22} + \lambda f_{22} & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & -\lambda g_{aa} & -g_a \\ f_1 & f_2 & -g_a & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

と仮定する。このヤコビアンは2階の十分条件と密接に関連しており、もしこの十分条件が満たされればこのヤコビアンは均衡点でゼロとならない。

$$pf_{11}\frac{\partial l^*}{\partial w} + pf_{12}\frac{\partial k^*}{\partial w} - 1 + \frac{\partial \lambda^*}{\partial w}f_1 + \lambda^*\left(f_{11}\frac{\partial l^*}{\partial w} + f_{12}\frac{\partial k^*}{\partial w}\right) \equiv 0 \quad (1-10)$$

(1-4) より

$$\begin{aligned} L_{11} &= (p+\lambda)f_{11} & f_{11} < 0 & & p+\lambda > 0^{(4)} \\ L_{12} &= (p+\lambda)f_{12} \\ L_{1a} &= 0 \\ L_{1\lambda} &= f_1 \end{aligned} \quad (1-11)$$

ただし

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial l^2} &= L_{11} & \frac{\partial^2 L}{\partial l \partial k} &= L_{12} & \frac{\partial^2 L}{\partial l \partial a} &= L_{1a} & \frac{\partial^2 L}{\partial l \partial \lambda} &= L_{1\lambda} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial l^2} &= f_{11} & \frac{\partial^2 f}{\partial l \partial k} &= f_{12} & \text{以下の偏微分についても同様に考える。} \end{aligned}$$

これより (1-10) はつぎのように書き変えることができる。

$$L_{11}\frac{\partial l^*}{\partial w} + L_{12}\frac{\partial k^*}{\partial w} + \frac{\partial \lambda^*}{\partial w}f_1 \equiv 1 \quad (1-12)$$

同様に (1-7) より

$$pf_{21}\frac{\partial l^*}{\partial w} + pf_{22}\frac{\partial k^*}{\partial w} + \frac{\partial \lambda^*}{\partial w}f_2 + \lambda^*\left(f_{21}\frac{\partial l^*}{\partial w} + f_{22}\frac{\partial k^*}{\partial w}\right) \equiv 0 \quad (1-13)$$

ここで (1-11) と同様に次式が成立する。

$$\begin{aligned} L_{21} &= (p+\lambda)f_{21} \\ L_{22} &= (p+\lambda)f_{22} & f_{22} < 0 \\ L_{2a} &= 0 \\ L_{2\lambda} &= f_2 \end{aligned} \quad (1-14)$$

したがって (1-13) 式は次のようになる。

$$L_{21}\frac{\partial x^*}{\partial w} + L_{22}\frac{\partial k^*}{\partial w} + L_{2\lambda}\frac{\partial \lambda^*}{\partial w} = 0 \quad (1-15)$$

(1-18) より

$$-\frac{\partial \lambda^*}{\partial w}g_a - \lambda^*g_{aa}\frac{\partial a^*}{\partial w} \equiv 0 \quad (1-16)$$

(1-4) より

$$\begin{aligned} L_{a1} &= 0 \\ L_{a2} &= 0 \\ L_{aa} &= -\lambda g_{aa} & g_{aa} < 0 \\ L_{a\lambda} &= -g_a \end{aligned} \quad (1-17)$$

したがって (1-16) は次のようになる。

---

(4)  $p+\lambda > 0$  となる必然性はない。もし  $p+\lambda$  の符号が確定できないならば後の直接効果の符号も確定できない。

$$L_{aa}\frac{\partial a^*}{\partial w} + L_{a\lambda}\frac{\partial \lambda^*}{\partial w} \equiv 0 \quad (1-18)$$

(1-9) より

$$f_1\frac{\partial l^*}{\partial w} + f_2\frac{\partial k^*}{\partial w} - g_a\frac{\partial a^*}{\partial w} \equiv 0 \quad (1-19)$$

(1-4) より

$$\begin{aligned} L_{\lambda 1} &= f_1 \\ L_{\lambda 2} &= f_2 \\ L_{\lambda a} &= -g_a \\ L_{\lambda \lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (1-20)$$

したがって (1-19) 式は次のようになる。

$$L_{\lambda 1}\frac{\partial l^*}{\partial w} + L_{\lambda 2}\frac{\partial k^*}{\partial w} - L_{\lambda a}\frac{\partial a^*}{\partial w} \equiv 0 \quad (1-21)$$

(1-12), (1-15), (1-18), (1-21) より次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{1a} & L_{1\lambda} \\ L_{21} & L_{22} & L_{2a} & L_{2\lambda} \\ L_{a1} & L_{a2} & L_{aa} & L_{a\lambda} \\ L_{\lambda 1} & L_{\lambda 2} & L_{\lambda a} & L_{\lambda \lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial l^*}{\partial w} \\ \frac{\partial k^*}{\partial w} \\ \frac{\partial a^*}{\partial w} \\ \frac{\partial \lambda^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1-22)$$

(1-22) は

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & f_1 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & L_{aa} & -g_a \\ f_1 & f_2 & -g_a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial l^*}{\partial w} \\ \frac{\partial k^*}{\partial w} \\ \frac{\partial a^*}{\partial w} \\ \frac{\partial \lambda^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1-23)$$

ここで (1-23) 式の行列の行列式を  $H$  とする。すなわち

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & f_1 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & L_{aa} & -g_a \\ f_1 & f_2 & -g_a & 0 \end{vmatrix} = H \quad (1-24)$$

連立方程式 (1-4) を解いて陽関数 (1-5) を求めるのに必要とされるヤコビアン  $|J|$  は、(1-4) の1階偏微分係数からできた行列の行列式であるので、 $|J|$  は實際上  $l, k, a$ , および  $\lambda$  に関するラグランジュ関数の2階偏微分係数からの行列式、すなわちヘッセ行列式  $H$  である。最

大値を保証する2階の十分条件は  $H \neq 0$  ( $(1-24)$  では  $H < 0$ ) であるから、陰関数定理により  $(1-4)$  を解いて  $(1-5)$  を求めることは認められたことになる<sup>(5)</sup>。

方程式  $(1-23)$  をクラメールの方法によって解く

$$\begin{aligned} \text{まず } \frac{\partial l^*}{\partial w} \text{ は} \\ \frac{\partial l^*}{\partial w} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & L_{12} & 0 & f_1 \\ 0 & L_{22} & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & L_{aa} & -g_a \\ 0 & f_2 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} = \frac{\begin{vmatrix} L_{22} & 0 & f_2 \\ 0 & L_{aa} & -g_a \\ f_2 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} \\ = \frac{-f_2^2 L_{aa} - g_a^2 L_{22}}{H} \end{aligned} \quad (1-25)$$

ここで  $L_{aa} = -\lambda g_{aa} < 0$  ( $\because (1-8), (1-17)$  より)

$L_{22} = (p + \lambda)f_{22} < 0$  ( $\because p + \lambda > 0$ )

$H < 0$

これより

$\frac{\partial l^*}{\partial w} < 0$  すなわち賃金の上昇は最適労働量を低くする効果(直接効果とよぶことにする)があると言える<sup>(6)</sup>。

次に賃金が資本に与える効果(間接効果とよぶことにする)は<sup>(7)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial k^*}{\partial w} = \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & 1 & 0 & f_1 \\ L_{21} & 0 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & L_{aa} & -g_a \\ f_1 & 0 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} = \frac{\begin{vmatrix} L_{21} & 0 & f_2 \\ 0 & L_{aa} & -g_a \\ f_1 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} \\ = \frac{f_1 f_2 L_{aa} + L_{21} g_a^2}{H} \end{aligned} \quad (1-26)$$

$(1-26)$  式では  $L_{21} = (p + \lambda)f_{21}$  の符号が確定できない

したがって賃金が最適資本量に与える影響については、判定することができない。

$\frac{\partial a^*}{\partial w}$  については

(5) [2] p. 242~243. これによって注(3)で仮定した  $|J| \neq 0$  は認められたことになる。

(6)(7) 以下  $\frac{\partial l^*}{\partial w}, \frac{\partial k^*}{\partial r}, \frac{\partial a^*}{\partial d}$  を直接効果とよびそれ以外の効果  $\frac{\partial i}{\partial j}$  を間接効果とよぶ。ただし  $i \neq j, i = l^*, k^*, a^*, j = w, r, d, p$  とする。

$$\frac{\partial a^*}{\partial w} = \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & 1 & f_1 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & 0 & -g_a \\ f_1 & f_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{H} = \frac{\begin{vmatrix} L_{21} & L_{22} & f_2 \\ 0 & 0 & -g_a \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix}}{H} \quad (1-27)$$

$\frac{\partial \lambda^*}{\partial w}$  については

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial w} = \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & 1 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{aa} & 0 \\ f_1 & f_2 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} = \frac{\begin{vmatrix} L_{21} & L_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L_{aa} \\ f_1 & f_2 & -g_a \end{vmatrix}}{H} \quad (1-28)$$

(1-27), (1-28) とともに  $L_{21}$  の符号が確定できないのでこの間接効果の判定はできない<sup>(8)</sup>。

次に資本財価格  $r$  が変化したときの,  $l^*$ ,  $k^*$ ,  $a^*$ ,  $\lambda^*$  への影響をみる。

(1-6) より

$$pf_{11}\frac{\partial l^*}{\partial r} + pf_{12}\frac{\partial k^*}{\partial r} + \frac{\partial \lambda^*}{\partial r}f_1 + \lambda^*\left(f_{11}\frac{\partial l^*}{\partial r} + f_{12}\frac{\partial k^*}{\partial r}\right) \equiv 0 \quad (1-29)$$

(1-11) より (1-29) は

$$L_{11}\frac{\partial l^*}{\partial r} + L_{12}\frac{\partial k^*}{\partial r} + L_{1\lambda}\frac{\partial \lambda^*}{\partial r} \equiv 0 \quad (1-30)$$

同様に (1-7) より

$$pf_{21}\frac{\partial l^*}{\partial r} + pf_{22}\frac{\partial k^*}{\partial r} - 1 + \frac{\partial \lambda^*}{\partial r}f_2 + \lambda^*\left(f_{21}\frac{\partial l^*}{\partial r} + f_{22}\frac{\partial k^*}{\partial r}\right) \equiv 0 \quad (1-31)$$

(1-14) より (1-31) は

$$L_{21}\frac{\partial l^*}{\partial r} + L_{22}\frac{\partial k^*}{\partial r} + L_{2\lambda}\frac{\partial \lambda^*}{\partial r} \equiv 1 \quad (1-32)$$

(1-8) より

$$-\frac{\partial \lambda^*}{\partial r}g_a - \lambda^*g_{aa}\frac{\partial a^*}{\partial r} \equiv 0 \quad (1-33)$$

(1-17) より (1-33) は

$$L_{aa}\frac{\partial a^*}{\partial r} + L_{a\lambda}\frac{\partial \lambda^*}{\partial r} \equiv 0 \quad (1-34)$$

(1-9) より

$$f_1\frac{\partial l^*}{\partial r} + f_2\frac{\partial k^*}{\partial r} - g_a\frac{\partial a^*}{\partial r} \equiv 0 \quad (1-35)$$

(8) 以下  $L_{ij}$  を交差効果とよぶ。ただし  $i \neq j$ ,  $i, j = l, k, a, \lambda$  とする。

(1-20) より (1-35) は

$$L_{\lambda 1} \frac{\partial l^*}{\partial r} + L_{\lambda 2} \frac{\partial k^*}{\partial r} + L_{\lambda a} \frac{\partial a^*}{\partial r} \equiv 0 \quad (1-36)$$

(1-30), (1-32), (1-34), (1-36) より

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & f_1 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & L_{aa} & -g_a \\ f_1 & f_2 & -g_a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial l^*}{\partial r} \\ \frac{\partial k^*}{\partial r} \\ \frac{\partial a^*}{\partial r} \\ \frac{\partial \lambda^*}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1-37)$$

資本財の価格  $r$  が最適労働量に与える影響は

$$\begin{aligned} \frac{\partial l^*}{\partial r} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & L_{12} & 0 & f_1 \\ 1 & L_{22} & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & L_{aa} & -g_a \\ 0 & f_2 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} = - \frac{\begin{vmatrix} L_{12} & 0 & f_1 \\ 0 & L_{aa} & -g_a \\ f_2 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} \\ &= \frac{-g_a^2 L_{12} + f_1 f_2 L_{aa}}{H} \quad (9) \end{aligned} \quad (1-38)$$

この符号は確定しないが, (1-26) と同じになり賃金が資本に与える効果に等しくなる。

同様に  $\frac{\partial k^*}{\partial r}$  については,

$$\begin{aligned} \frac{\partial k^*}{\partial r} &= \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & 0 & 0 & f_1 \\ L_{21} & 1 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & L_{aa} & -g_a \\ f_1 & 0 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} = \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & 0 & f_1 \\ 0 & L_{aa} & -g_a \\ f_1 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} \\ &= \frac{-(g_a^2 L_{11} + f_1^2 L_{aa})}{H} \quad (1-39) \end{aligned}$$

(1-11), (1-17), (1-24) より

$$\frac{\partial k^*}{\partial r} < 0$$

これより資本財の価格の上昇は, 最適資本量を減少させる効果をもつ。

$\frac{\partial a^*}{\partial r}$  については

(9) ここで  $H$  は (1-24) の  $H$  であり, 縁付ヘッセ行列式である。

$$\frac{\partial a^*}{\partial r} = \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & f_1 \\ L_{21} & L_{22} & 1 & f_2 \\ 0 & 0 & 0 & -g_a \\ f_1 & f_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{H} = - \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & f_1 \\ 0 & 0 & -g_a \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix}}{H}$$

$$= \frac{-g_a(f_2 L_{11} - f_1 L_{12})}{H} \quad (1-40)$$

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial r} \text{ について}$$

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial r} = \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & L_{aa} & 0 \\ f_1 & f_2 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} = \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 \\ 0 & 0 & L_{aa} \\ f_1 & f_2 & -g_a \end{vmatrix}}{H}$$

$$= \frac{f_1 L_{12} L_{22} - f_2 L_{11} L_{aa}}{H} \quad (1-41)$$

(1-40), (1-41) とも  $L_{12}$  の符号が確定できないゆえにその符号は判別できない。

次に広告の価格が変化したときの,  $l^*$ ,  $k^*$ ,  $a^*$ ,  $\lambda^*$  の効果をみる。

(1-6) より

$$p f_{11} \frac{\partial l^*}{\partial d} + p f_{12} \frac{\partial k^*}{\partial d} + \frac{\partial \lambda^*}{\partial d} f_1 + \lambda^* \left( f_{11} \frac{\partial l^*}{\partial d} + f_{12} \frac{\partial k^*}{\partial d} \right) \equiv 0 \quad (1-42)$$

(1-11) より (1-42) は

$$L_{11} \frac{\partial l^*}{\partial d} + L_{12} \frac{\partial k^*}{\partial d} + L_{1\lambda} \frac{\partial \lambda^*}{\partial d} \equiv 0 \quad (1-43)$$

(1-7) より

$$p f_{21} \frac{\partial l^*}{\partial d} + p f_{22} \frac{\partial k^*}{\partial d} + \frac{\partial \lambda^*}{\partial d} f_2 + \lambda^* \left( f_{21} \frac{\partial l^*}{\partial d} + f_{22} \frac{\partial k^*}{\partial d} \right) \equiv 0 \quad (1-44)$$

(1-14) より (1-44) は,

$$L_{21} \frac{\partial l^*}{\partial d} + L_{22} \frac{\partial k^*}{\partial d} + L_{2\lambda} \frac{\partial \lambda^*}{\partial d} \equiv 0 \quad (1-45)$$

(1-8) より

$$-1 - \frac{\partial \lambda^*}{\partial d} g_a - \lambda^* g_{aa} \frac{\partial a^*}{\partial d} \equiv 0 \quad (1-46)$$

(1-17) より (1-46) は,

$$L_{aa} \frac{\partial a^*}{\partial d} + L_{a\lambda} \frac{\partial \lambda^*}{\partial d} \equiv 1 \quad (1-47)$$

(1-9) より

$$f_1 \frac{\partial l^*}{\partial d} + f_2 \frac{\partial k^*}{\partial d} - g_a \frac{\partial a^*}{\partial d} = 0 \quad (1-48)$$

(1-20) より (1-48) は

$$L_{\lambda 1} \frac{\partial l^*}{\partial d} + L_{\lambda 2} \frac{\partial k^*}{\partial d} + L_{\lambda a} \frac{\partial a^*}{\partial d} = 0 \quad (1-49)$$

(1-43), (1-45), (1-46), (1-49) より

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & f_1 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & L_{aa} & -g_a \\ f_1 & f_2 & -g_a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial l^*}{\partial d} \\ \frac{\partial k^*}{\partial d} \\ \frac{\partial a^*}{\partial d} \\ \frac{\partial \lambda^*}{\partial d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1-50)$$

 $\frac{\partial l^*}{\partial d}$  について

$$\begin{aligned} \frac{\partial l^*}{\partial d} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & L_{12} & 0 & f_1 \\ 0 & L_{22} & 0 & f_2 \\ 1 & 0 & L_{aa} & -g_a \\ 0 & f_2 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} = \frac{\begin{vmatrix} L_{12} & 0 & f_1 \\ L_{22} & 0 & f_2 \\ f_2 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} \\ &= \frac{f_2 g_a L_{12} - f_1 g_a L_{22}}{H} \quad (1-51) \end{aligned}$$

(1-51) の符号は判定できない。

 $\frac{\partial k^*}{\partial d}$  について

$$\begin{aligned} \frac{\partial k^*}{\partial d} &= \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & 0 & 0 & f_1 \\ L_{21} & 0 & 0 & f_2 \\ 0 & 1 & L_{aa} & -g_a \\ f_1 & 0 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} = \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & 0 & f_1 \\ L_{21} & 0 & f_2 \\ f_1 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} \\ &= \frac{f_1 g_a L_{21} - f_2 g_a L_{11}}{H} \quad (1-52) \end{aligned}$$

(1-52) の符号も判定できないが, (1-51) と同符号である。

 $\frac{\partial a^*}{\partial d}$  について

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a^*}{\partial d} &= \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & f_1 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 & -g_a \\ f_1 & f_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{H} = \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & f_1 \\ L_{21} & L_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix}}{H} \\
 &= \frac{f_1 \begin{vmatrix} L_{12} & f_1 \\ L_{22} & f_2 \end{vmatrix} - f_2 \begin{vmatrix} L_{11} & f_1 \\ L_{21} & f_2 \end{vmatrix}}{H} = \frac{f_1 f_2 L_{12} - f_1^2 L_{22} - L_{11} f_2^2 + L_{21} f_1 f_2}{H} \\
 &\quad \frac{2f_1 f_2 L_{12} - f_1^2 L_{22} - L_{11} f_2^2}{H} \quad (1-53)
 \end{aligned}$$

(1-53) についても  $L_{12}$  が不確定であるから、符号は判定できない。したがって需要関数についての直接効果、すなわち広告の価格が増加しても、最適広告費への影響を判定できないのは生産についての交差効果  $L_{12}$  が関係してくるが故に、その効果が判定できない<sup>(10)</sup>。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \lambda^*}{\partial d} \text{ について} \\
 \frac{\partial \lambda^*}{\partial d} &= \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{aa} & 1 \\ f_1 & f_2 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} = - \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ f_1 & f_2 & -g_a \end{vmatrix}}{H} \\
 &= \frac{g_a L_{11} L_{22} - g_a L_{12}^2}{H} \quad (1-54)
 \end{aligned}$$

これより (1-54) は

$$g_a L_{11} L_{aa} > g_a L_{12}^2 \Rightarrow \frac{\partial \lambda^*}{\partial d} < 0$$

$$g_a L_{11} L_{aa} < g_a L_{12}^2 \Rightarrow \frac{\partial \lambda^*}{\partial d} > 0$$

$p$  の変化が最適変数に与える効果については、

(1-6) より

$$f_1 + q f_{11} \frac{\partial l^*}{\partial q} + p f_{12} \frac{\partial k^*}{\partial p} + \frac{\partial \lambda^*}{\partial p} f_1 + \lambda^* \left( f_{11} \frac{\partial l^*}{\partial p} + f_{12} \frac{\partial k^*}{\partial p} \right) = 0 \quad (1-55)$$

(1-11) より (1-55) は

$$L_{11} \frac{\partial l^*}{\partial p} + L_{12} \frac{\partial k^*}{\partial p} + L_{1\lambda} \frac{\partial \lambda^*}{\partial p} = -f_1 \quad (1-56)$$

(10) (1-51), (1-52), (1-53) で  $L_{12} > 0$  という仮定を置けば符号は確定し、それぞれ

$$\frac{\partial l^*}{\partial d} < 0, \frac{\partial k^*}{\partial d} < 0, \frac{\partial a^*}{\partial d} < 0 \text{ となる.}$$

(1-7) より

$$f_2 + p f_{21} \frac{\partial l^*}{\partial p} + p f_{22} \frac{\partial k^*}{\partial p} + \frac{\partial \lambda^*}{\partial p} f_2 + \lambda^* \left( f_{21} \frac{\partial l^*}{\partial p} + f_{22} \frac{\partial k^*}{\partial p} \right) = 0 \quad (1-57)$$

(1-14) より (1-57) は

$$L_{21} \frac{\partial l^*}{\partial p} + L_{22} \frac{\partial k^*}{\partial p} + L_{2\lambda} \frac{\partial \lambda^*}{\partial p} = -f_2 \quad (1-58)$$

(1-8) より

$$-\frac{\partial \lambda^*}{\partial p} g_a - \lambda^* g_{aa} \frac{\partial a^*}{\partial p} = 0 \quad (1-59)$$

(1-17) より (1-59) は

$$L_{aa} \frac{\partial a^*}{\partial p} + L_{a\lambda} \frac{\partial \lambda^*}{\partial p} = 0 \quad (1-60)$$

(1-9) より

$$f_1 \frac{\partial l^*}{\partial p} + f_2 \frac{\partial k^*}{\partial p} - g_a \frac{\partial a^*}{\partial p} = 0 \quad (1-61)$$

(1-20) より (1-61) は

$$L_{\lambda 1} \frac{\partial l^*}{\partial p} + L_{\lambda 2} \frac{\partial k^*}{\partial p} + L_{\lambda a} \frac{\partial a^*}{\partial p} = 0 \quad (1-62)$$

(1-56), (1-58), (1-60), (1-62) より

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & f_1 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & L_{aa} & -g_a \\ f_1 & f_2 & -g_a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial l^*}{\partial p} \\ \frac{\partial k^*}{\partial p} \\ \frac{\partial a^*}{\partial p} \\ \frac{\partial \lambda^*}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

 $\frac{\partial l^*}{\partial p}$  について,

$$\begin{aligned} \frac{\partial l^*}{\partial p} &= \frac{\begin{vmatrix} -f_1 & L_{12} & 0 & f_1 \\ -f_2 & L_{22} & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & L_{aa} & -g_a \\ 0 & f_2 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} = \frac{L_{aa} \begin{vmatrix} -f_1 & L_{12} & f_1 \\ -f_2 & L_{22} & f_2 \\ 0 & f_2 & 0 \end{vmatrix} + g_a \begin{vmatrix} -f_1 & L_{12} & 0 \\ -f_2 & L_{22} & 0 \\ 0 & f_2 & -g_a \end{vmatrix}}{H} \\ &= \frac{-f_2 L_{aa} (-f_1 f_2 + f_1 f_2) - g_a^2 (-f_1 L_{22} + f_2 L_{12})}{H} = \frac{f_1 g_a^2 L_{22} - f_2 g_a^2 L_{12}}{H} \quad (1-63) \end{aligned}$$

 $\frac{\partial k^*}{\partial p}$  について,

$$\frac{\partial k^*}{\partial p} = \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & -f_1 & 0 & f_1 \\ L_{21} & -f_2 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & L_{aa} & -g_a \\ f_1 & 0 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} = \frac{-f_1 \begin{vmatrix} -f_1 & 0 & f_1 \\ -f_2 & 0 & f_2 \\ 0 & L_{aa} & -g_a \end{vmatrix} + g_a \begin{vmatrix} L_{11} & -f_1 & f_1 \\ L_{21} & -f_2 & f_2 \\ 0 & 0 & -g_a \end{vmatrix}}{H}$$

$$= \frac{g_a^2 f_2 L_{11} - f_1 g_a^2 L_{21}}{H} \quad (1-64)$$

$\frac{\partial a^*}{\partial p}$  について,

$$\frac{\partial a^*}{\partial p} = \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & -f_1 & f_1 \\ L_{21} & L_{22} & -f_2 & f_2 \\ 0 & 0 & 0 & -g_a \\ f_1 & f_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{H} = \frac{g_a \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & -f_1 \\ L_{21} & L_{22} & -f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix}}{H}$$

$$= \frac{f_1^2 g_a L_{22} + f_2 g_a L_{11} - 2f_1 f_2 g_a L_{21}}{H} \quad (1-65)$$

$\frac{\partial \lambda^*}{\partial p}$  について

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial p} = \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & -f_1 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & -f_2 \\ 0 & 0 & L_{aa} & 0 \\ f_1 & f_2 & -g_a & 0 \end{vmatrix}}{H} = \frac{L_{aa} \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & -f_1 \\ L_{21} & L_{22} & -f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix}}{H}$$

$$= \frac{f_1^2 L_{22} L_{aa} + f_2^2 L_{11} L_{aa} - 2f_1 f_2 L_{21} L_{aa}}{H} \quad (1-66)$$

以上により、生産物価格が、内生変数の最適値に与える効果については、判定はできないが  $L_{12} = L_{21}$  の符号が正であれば、(1-63), (1-64), (1-65) の符号は確定し、それぞれ偏微分係数はプラスの符号をもつ<sup>(11)</sup>。

## 〔Ⅱ〕 最適利潤の変動

次に利潤の最適値はパラメーターの変化によってどのような影響を受けるかを検討する。

(1-1), (1-2) は (1-5) を考慮するとそれぞれ次のようになる。

(11) (1-65) については  $L_{12} > 0$  であってもその符号は確定しない。

$$f(l^*, k^*) - g(p, a^*) = 0 \quad (2-1)$$

$$\pi^* = pf(l^*, k^*) - wl^* - rk^* - da^* \quad (2-2)$$

$\pi^*$  はパラメーター,  $w, r, d, p$  が, 任意に与えられたとき, 制約を満足する  $l, k, a$ , に対する  $\pi$  の最大値を表わしている。

(2-2) をまず  $w$  に関して偏微分する。

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w} = pf_1 \frac{\partial l^*}{\partial w} + pf_2 \frac{\partial k^*}{\partial w} - l^* - w \frac{\partial l^*}{\partial w} - r \frac{\partial k^*}{\partial w} - d \frac{\partial a^*}{\partial w} \quad (2-3)$$

ここで制約式 (2-1) を  $w$  に関して偏微分する。

$$f_1 \frac{\partial l^*}{\partial w} + f_2 \frac{\partial k^*}{\partial w} - g_a \frac{\partial a^*}{\partial w} = 0 \quad (2-4)$$

(2-4) に  $\lambda$  を掛けたものを (2-3) に加えると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi^*}{\partial w} &= pf_1 \frac{\partial l^*}{\partial w} + pf_2 \frac{\partial k^*}{\partial w} - l^* - w \frac{\partial l^*}{\partial w} - r \frac{\partial k^*}{\partial w} - d \frac{\partial a^*}{\partial w} + \lambda f_1 \frac{\partial l^*}{\partial w} \\ &\quad + \lambda f_2 \frac{\partial k^*}{\partial w} - \lambda g_a \frac{\partial a^*}{\partial w} \\ &= (pf_1 - w + \lambda f_1) \frac{\partial l^*}{\partial w} + (pf_2 - r + \lambda f_2) \frac{\partial k^*}{\partial w} - (d + \lambda g_a) \frac{\partial a^*}{\partial w} = l^* \end{aligned} \quad (2-5)$$

ここで最大化のための1階の必要条件 (1-4) より, (2-5) は

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w} = -l^* < 0$$

賃金の上昇は最適利潤を減少させる効果をもつ。

同様に  $r$  の  $\pi^*$  への効果は,

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial r} = pf_1 \frac{\partial l^*}{\partial r} + pf_2 \frac{\partial k^*}{\partial r} - w \frac{\partial l^*}{\partial r} - k^* - \frac{\partial k^*}{\partial r} - d \frac{\partial a^*}{\partial r} \quad (2-6)$$

ここで (2-1) を  $r$  に関して偏微分した式に  $\lambda$  を掛けたものを (2-6) に加えて整理すると,

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial r} = (pf_1 - w + \lambda f_1) \frac{\partial l^*}{\partial r} + (pf_2 - r + \lambda f_2) \frac{\partial k^*}{\partial r} - (d + \lambda g_a) \frac{\partial a^*}{\partial r} - k^* \quad (2-7)$$

1階の必要条件より

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial r} = -k^* < 0$$

$d$  の  $\pi^*$  への効果については,

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial d} = pf_1 \frac{\partial l^*}{\partial d} + pf_2 \frac{\partial k^*}{\partial d} - w \frac{\partial l^*}{\partial d} - r \frac{\partial k^*}{\partial d} - a^* - \frac{\partial a^*}{\partial d} \quad (2-8)$$

同様にして整理すると,

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial d} = -a^* < 0$$

$p$  の  $\pi^*$  への効果については,

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = f(l^*, q^*) + pf_1 \frac{\partial l^*}{\partial p} + pf_2 \frac{\partial k^*}{\partial p} - w \frac{\partial l^*}{\partial p} - r \frac{\partial k^*}{\partial p} - d \frac{\partial a^*}{\partial p} \quad (2-9)$$

同様にして整理すると,

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = f(x^*, p^*) > 0$$

以上により, パラメーターの最適利潤水準に与える効果について, 要素価格と広価の価格に関してはマイナスの効果を与え, 生産物価格が増加すると最適利潤は増加するという効果をもつ。

## あ と が き

一般に不完全競争市場の下では, 需要量は生産量に等しくない。したがって, 利潤最大化を問題にする場合には, 需要関数  $g(\cdot)$  か生産関数  $f(\cdot)$  のいずれかに限定して定式化を行うのが一般的である。我々のモデルでは, 広告を需要関数に入れることで,  $g(\cdot)$  と  $f(\cdot)$  が不完全競争市場でも等しいことを前提として, モデルを定式化した。そこで得られた結果は, 最適な内生変数に関してのパラメーターの変化による効果は,  $f(\cdot)$  に関する直接効果では符号は確定したが,  $g(\cdot)$  に関する直接効果に関しては, 生産に関する交差効果が入るが故に符号は確定できなかった。 $f(\cdot)$  と  $g(\cdot)$  に関する間接効果については交差効果により符号が確定できない。これは変数が3個以上であることによる。もし変数が2個であれば, この間接効果の符号は確定できる。

生産物価格に関しては, いずれの最適変数に関しても確定できないが, 交差効果が正であれば,  $\frac{\partial l^*}{\partial p}, \frac{\partial k^*}{\partial p}, \frac{\partial a^*}{\partial p}$  はいずれも正となる。

さらに最適利潤に関してはすべて符号が判定できた。

## 参 考 文 献

- [1] G. Becker, "Irrational Behavior and Economic Theory," *Journal of political Economy*, 70 : pp. 1-13, 1962.
- [2] A. Chiang, *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 2nd Edition, McGraw-Hill Inc., 1974 (大住, 小田, 高森, 堀江訳『現代経済学の数学基礎』マグローヒルブック社)
- [3] R. Coase, "The Nature of the Firm", *Economica*, pp. 331-351, 1937.
- [4] R. Dorfman and P. Steiner, "Optimal Advertising and Optimal Quality", *American Economic Review*, 44, 1954.
- [5] M. Nerlove and K. Arrow, "Optimal Advertising Policy under Dynamic Condition", *Economica*, n. s., 29, 1962.
- [6] E. Silberberg, "A Revision of Comparative Statics Methodology in Economics, or: How to do Economics on the Back of an Envelope", *Journal of Economic Theory*, February, 1974.
- [7] E. Silberberg, *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Inc., 1978 (佐藤監訳大住訳『現代経済学』マグローヒル)
- [8] 青木昌彦, 伊丹敬之著『企業の経済学』岩波書店1985.
- [9] 安部栄造「一般均衡理論の一断面」阪南論集19巻2号, 1983.

(昭和60年10月29日受理)