

## 研究ノート

## 経済循環と均衡成長

—— Smithies モデルによせて ——

前 野 富 士 生

## I

経済の循環と成長に関しては、今までに数多くのモデルが提示され、そのモデルに導入される投資関数、消費関数にも多くのタイプが考えられてきた。ここでとりあげる Smithies モデルもそのなかのひとつである。

このノートは、“ratcht effect”を投資関数、消費関数に入れて、経済の循環と成長のモデルを分析する場合、景気上昇の極面と下降極面のいずれの場合にも、Smithies モデルが適切である否かを論ずるにある。

## II

II—I 以下、Smithies モデルの骨格を述べる<sup>(1)</sup>。

彼は投資関数を分析するために以下の要因を考慮する。

(1) 利潤、これは次の理由から投資に正の効果を与えると考える。すなわち利潤発生の期待は投資決意への誘因となり、さらに利潤は投資の源泉となる。しかし現実には、投資資金は借入れによって調達されること

が多い。むしろ企業家にとって借入れにより内部留保(利潤)による資金調達の方が望ましいとされる。<sup>(2)</sup>

(2) 完全能力産出高と現実の産出高、完全能力産出高とは、資本設備の正常な稼動(利用)のもとで得られる産出高をいみする。<sup>(3)</sup> 従って現実需要が能力産出高を超過した場合にかぎって、企業家は資本ストックを増加させる。

(3) 趨勢要因

以上の前提のもとで投資関数を明示すると

$$I_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 \bar{Y} - \beta_3 (Y_{Ft-1} - \bar{Y}) + \nu^t \quad (1)$$

$\beta_1 \beta_2 \beta_3$  は正の定数である。

$I$  = 粗投資

$Y$  = 粗国民産出高

$\bar{Y}$  = これまでに実現した最高の粗国民産出高

$Y_F$  = 完全能力産出高

$\nu^t$  = 趨勢項( $\nu > 1$ )

このようにあらゆる経済諸量は“gross”の概念とする。(1)式のいみを以下に示すと、利潤は国民粗産出高にほぼ一定割合で得られるとすると $(\beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 \bar{Y})$ の項は利潤の影響を示している。そして利潤予想は実現された利潤と今までに得られた最高の利潤水準に依存し、しかも投資決意と実行には一期のラグがあるとする。従って $(\beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 \bar{Y})$ が得られる。 $-\beta_3 (Y_{Ft-1} - \bar{Y})$ の項は前提(2)で述べたように、 $\bar{Y} > Y_{Ft-1}$ のときにのみ企業家は資本設備を増加する。前と同様に一期のラグがあるとする。 $\nu^t$ は趨勢項で外生的に与えられ、例へば人口増加等と考えればよい。

次に現在の消費は現在の所得と今までに得られた最高の粗所得 $Y$ に依存する、いわゆる“ratchet effect”を考慮した Modigliani, F., Duesenberry, J. S., の消費関数の理論による。<sup>(4)</sup>

従って消費関数は、

経済循環と均衡成長

55

$$C_t = h_1 Y_t + h_2 \bar{Y} \quad (2)$$

$h_1, h_2$  は正の定数で  $h_1 + h_2 < 1$  とする。

均衡成長の下では ( $\bar{Y} = Y_t$ ) となり、長期の貯蓄性は  $1 - (h_1 + h_2)$  である。

均衡な状態では

$$Y_t = C_t + I_t \quad (3)$$

あるいは

$$S_t = I_t \quad (3')$$

注

(1) Smithies [8] pp1—52 Gandolfo [4] 8章・9章

(2) 内部資金の創造のひとつの手段として、マーク・アップ率を上昇させることによって追加的投資資金を得ることが可能である。この方法を採用する場合二つのケースが考えられる。第一にマーク・アップ率を上昇させても、参入、代替効果等による危険がない時は、需要の弾力性のみを考えて、企業家はマークアップを決めることが可能である。第二にマーク・アップ率を上昇させた時、参入、代替効果等の危険性が生じる場合には、それを考慮してアップ率を決めねばならない。この危険率と外部からの借入による利子率とを考慮して企業は投資資金を調達する。Eichner [3] pp 1190—1195

(3) 過剰設備能力あるいは逆に機械の酷使等のないケース。

(4) Modigliani [7] Duesenberry [2]

II—2 モデルの定式化を行うために、投資と完全能力産出高との関係を検討すると、Smithies は Domar に従って次の  $\sigma$  を定義する。(1)

$$Y_{Ft} - Y_{Ft-1} = \sigma I_{t-1}$$

この式の  $\sigma$  は単位当り投資の増加は  $t$  期における完全能力産出高の増加を示す。さらに減価償却と陳腐化及び技術進歩を考慮する。減価償却は完全能力産出高の一定割合でなされると仮定し、陳腐化 (Obsolescence) は異常な陳腐化のみを考える。(2) 異常な陳腐化は完全能力産出高と現実の差異の一定割合と考える。すなわち現実の需要が完全能力産出物より低い時は、設備のスクラップ化が予想され、需要が高い時はスクラップされるは

56

阪南論集 第10巻第6号

ずの資本設備が使用されて陳腐化は起らないと考える。技術進歩は趨勢項  $\mu$  として表わされる。従って次式が得られる。

$$Y_{Ft} - Y_{Ft-1} = \sigma I_{t-1} - D_1 - D_2 + \mu^t \quad (4)$$

$$\mu > 1$$

$D_1$  は減価償却、 $D_2$  は異常な陳腐化を示す。

$$D = \theta_1 Y_{Ft-1} \quad 0 < \theta_1 < 1 \quad (5)$$

$$D_2 = \theta_2 (Y_{Ft-1} - Y_{t-1}) \quad 0 < \theta_2 < 1 \quad (6)$$

モデルの理解のために Smithies は二つの状態を考える。

まず、“ratchet” が働かないケースを State 1 とする。従って (1) 式では ( $\bar{Y} = Y_{t-1}$ ) (2) 式では ( $\bar{Y} = Y_t$ ) ratchet が働くケースを State 2 として、(1) (2) 式ではそれぞれ ( $\bar{Y} \rightleftharpoons Y_{t-1}$ )、( $\bar{Y} \rightleftharpoons Y_t$ ) である。この経済的意味は State 1 では、現在の粗国民産出高が常に実現した中での最高の粗産出高となって (均衡成長の経済状況) 消費関数に示される。投資関数では一期のラグをともなった産出高が実現した中での最高の産出高に等しくなっている。従って次の連立定差方程式体系をえる。

(1), (2), (3) 式より

$$Y_t = a_{11} Y_{t-1} + a_{12} Y_{Ft-1} + \tau \nu^t \quad (7)$$

(2)(3)(4) 式より

$$Y_{Ft} = a_{21} Y_{t-1} + a_{22} Y_{Ft-1} + \mu^t \quad (8)$$

$$a_{11} = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{1 - (h_1 + h_2)}$$

$$a_{12} = \frac{-\beta_3}{1 - (h_1 + h_2)}$$

$$a_{21} = \sigma [1 - (h_1 + h_2)] + \theta_2$$

$$a_{22} = 1 - \theta_1 - \theta_2$$

$$\tau = \frac{1}{1 - (h_1 + h_2)}$$

State 2 は

経済循環と均衡成長

57

$$Y_t = a'_{11} Y_{t-1} + a'_{12} Y_{Ft-1} + \omega \bar{Y} + \tau' \nu^t \quad (9)$$

$$Y_{Ft} = a'_{21} Y_{t-1} + a'_{22} Y_{Ft-1} + \varepsilon \bar{Y} + \mu^t \quad (10)$$

$$a'_{11} = \frac{\beta_1}{1-h_1}$$

$$a'_{12} = \frac{-\beta_3}{1-h_1}$$

$$a'_{21} = \sigma(1-h_1) + \theta_2$$

$$a'_{22} = 1 - \theta_1 - \theta_2$$

$$\tau' = \frac{1}{1-h_1}$$

$$\omega = \frac{h_2 + \beta_1 + \beta_3}{1-h_1}$$

$$\varepsilon = -\sigma h_2$$

注

(1) Domar[1] 3章

(2) ノーマルな陳腐化は粗投資の一定割合で  $\sigma$  の中に含める。

Ⅱ—3 まず State I のケースを検討する。

(7)(8)式の同時部分の一般解を  $Y_t = \alpha_1 \lambda^t$   $Y_{Ft} = \alpha_2 \lambda^t$ , として ( $\alpha_1, \alpha_2$  はゼロでない定数), (1) 代入すると

$$\alpha_1 \lambda^t = a_{11} \alpha_1 \lambda^{t-1} + a_{12} \alpha_2 \lambda^{t-1}$$

$$\alpha_2 \lambda^t = a_{21} \alpha_1 \lambda^{t-1} + a_{22} \alpha_2 \lambda^{t-1}$$

これより

$$\lambda^{t-1} [(a_{11} - \lambda) \alpha_1 + a_{12} \alpha_2] = 0 \quad (11)$$

$$\lambda^{t-1} [a_{21} \alpha_1 + (a_{22} - \lambda) \alpha_2] = 0$$

従って

$$(a_{11} - \lambda) \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 = 0 \quad (12)$$

$$a_{21} \alpha_1 + (a_{22} - \lambda) \alpha_2 = 0$$

58

阪南論集 第10巻第6号

のときにのみ(11)式は満足される。

(12) 式が自明な解 ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ) 以外の解を持つための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

あるいは

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \quad (13')$$

(13)(13')式は(7)(8)式の特性方程式である。

$\lambda_1, \lambda_2$  は異なる実根とする。いま (12) 式に  $\lambda_1$  を入れた時の解を [ $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}$ ],  $\lambda_2$  を入れた時の解を [ $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}$ ] とすると,

$\lambda = \lambda_1$  に対して

$$(a_{11} - \lambda_1) \alpha_1^{(1)} + a_{12} \alpha_2^{(1)} = 0 \quad (12')$$

$$a_{21} \alpha_1^{(1)} + (a_{22} - \lambda_1) \alpha_2^{(1)} = 0$$

ここで次のそうさをほどこす。

$\alpha_1^{(1)} = 1$  とすると, (12')式より

$$\alpha_2^{(1)} = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \quad \alpha_2^{(1)} = \frac{a_{21}}{\lambda_1 - a_{22}}$$

ここで  $\lambda_1$  が特性方程式の根で

$$(a_{11} - \lambda_1)(a_{22} - \lambda_1) - a_{12}a_{21} = 0 \text{ より}$$

$$\alpha_2^{(1)} = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda_1 - a_{22}}$$

同様に  $\lambda = \lambda_2$  として  $\alpha_1^{(2)} = 1$  とすると

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda_2 - a_{22}}$$

このようにして,  $Y_t^1 = \alpha_1^{(1)} \lambda_1^t$   $Y_{Ft}^1 = \alpha_2^{(1)} \lambda_1^t$  が (7)(8) の同次部分の一つの解であり

$Y_t^2 = \alpha_1^{(2)} \lambda_2^t$   $Y_{Ft}^2 = \alpha_2^{(2)} \lambda_2^t$  がもう一つの解である。

$A_1, A_2$ を任意定数とすれば(7)(8)式の同次部分の一般解は

$$Y_t = A_1 \alpha_1^{(1)} \lambda_1^t + A_2 \alpha_1^{(2)} \lambda_2^t \quad (14)$$

$$Y_{Ft} = A_1 \alpha_2^{(1)} \lambda_1^t + A_2 \alpha_2^{(2)} \lambda_2^t \quad (15)$$

$\alpha_i^{(j)} (i,j=1,2)$ を考えて

$$Y_t = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t \quad (16)$$

$$Y_{Ft} = A_1 \frac{\lambda_1 a_{11}}{a_{12}} \lambda_1^t + A_2 \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} \lambda_2^t \quad (17)$$

これより

$$Y_t = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t \quad (18)$$

$$Y_{Ft} = A_1' \lambda_1^t + A_2' \lambda_2^t$$

として  $A_1 A_2 A_1' A_2'$ の比率は

$$\frac{A_1'}{A_1} = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda_1 - a_{22}} \quad (19)$$

$$\frac{A_2'}{A_2} = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda_2 - a_{22}}$$

$\frac{A_1'}{A_1}, \frac{A_2'}{A_2}$  は係数と $\lambda$ が決まれば一意に決まるから、独立

な任意定数は二つとなる。

次に特解を求めるため、Smithies は趨勢項を一つにして単純化する。

すなわち $\nu^t$ のみを残す。特解を  $Y_t = \rho_1 \nu^t, Y_{Ft} = \rho_2 \nu^t$  として  $\rho_1, \rho_2$  の関係を求めると ( $\rho_1, \rho_2$  は未決定係数である)

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{a_{21}}{\nu - a_{22}} \quad (20) \quad (2)$$

従って State I の一般解は

$$Y_t = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^{(t)} + \rho_1 \nu^t \quad (21)$$

$$Y_{Ft} = A_1' \lambda_1^t + A_2' \lambda_2^{(t)} + \rho_2 \nu^t \quad (22)$$

初期条件  $t=0$  に対して  $Y_t = Y_0, Y_{Ft} = Y_{F0}$  として一般解に代入して任意定数を求めると<sup>(3)</sup>

$$A_1 = \frac{Y_0(a_{11} - \lambda_2) + a_{12} Y_{F0} - \rho_1 [a_{21} a_{12} / (\nu - a_{22}) + a_{11} - \lambda_2]}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$A_2 = \frac{Y_0(a_{11} - \lambda_1) + a_{12} Y_{F0} - \rho_1 [a_{21} a_{12} / (\nu - a_{22}) + a_{11} - \lambda_1]}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

(注)

(1) Gandolfo 【4】 pp124—131 新開【10】 2—3 章

(2)  $Y_t = \rho_1 \nu^t, Y_{Ft} = \rho_2 \nu^t$  を (7)(8)に代入すると

$$\rho_1 \nu^t = a_{11} \rho_1 \nu^{t-1} + a_{12} \rho_2 \nu^{t-1} + \tau \nu^t$$

$$\rho_2 \nu^t = a_{21} \rho_1 \nu^{t-1} + a_{22} \rho_2 \nu^{t-1}$$

両辺を $\nu^{t-1}$ で除すと

$$(a_{11} - \nu) \rho_1 + a_{12} \rho_2 = -\tau \nu$$

$$a_{21} \rho_1 + (a_{22} - \nu) \rho_2 = 0$$

クラームルの公式より

$$\rho_1 = \frac{\tau \nu (\nu - a_{22})}{a_{11} - \nu (a_{22} - \nu) - a_{12} a_{21}}$$

$$\rho_2 = \frac{a_{21} \tau \nu}{(a_{11} - \nu) (a_{22} - \nu) - a_{12} a_{21}}$$

分母を考えると

$$(a_{11} - \nu) (a_{22} - \nu) - a_{12} a_{21} = \nu^2 - (a_{11} + a_{22}) \nu + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$$

二次方程式の根と係数の関係よりこの式は

$$(\nu - \nu_1) (\nu - \nu_2) \text{で } \nu_1 \nu_2 \text{ は}$$

$$\nu^2 - (a_{11} + a_{22}) \nu + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = 0 \text{の根である}$$

しかし、この方程式は同時部分の特性方程式と同じであるから

$$\nu_1 = \lambda_1, \nu_2 = \lambda_2 \text{ となり}$$

$$\rho_1 = \frac{\tau \nu (\nu - a_{22})}{(\nu - \lambda_1) (\nu - \lambda_2)}$$

$$\rho_2 = \frac{a_{21} \tau \nu}{(\nu - \lambda_1) (\nu - \lambda_2)}$$

より(20)式が得られる。

(3)

(19)式より

$$A_1' = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} A_1 \quad A_2' = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}$$

$$Y_0 = A_1 + A_2 + \rho_1 \quad \therefore A_2 = Y_0 - A_1 - \rho_1$$

$$Y_{F0} = A_1' + A_2' + \rho_2$$

$$Y_{F0} = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} A_1 + \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} A_2 + \rho_2$$

$$Y_{F0} a_{12} = (\lambda_1 - a_{11}) A_1 + (\lambda_2 - a_{11}) (Y_0 - A_1 - \rho_1) + \rho_2 a_{12}$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2) A_1 + (\lambda_2 - a_{11}) Y_0 + (a_{11} - \lambda_2) \rho_1 + a_{12} \rho_2$$

ここで(20)式を考えて

$$A_1 (\lambda_1 - \lambda_2) = Y_0 (a_{11} - \lambda_2) + a_{12} Y_{F0} - \rho_1 (a_{11} - \lambda_2) - \rho_1 \frac{a_{21}}{\nu - a_{22}} a_{12}$$

$A_2$  も同様にしてあるいは  $A_1' A_2'$  も同様にして求めることができる。

II-4 次に State I の解が均衡成長となる条件を求める。振動する場合

は後で検討する。一般解を次のように書きなおすと

$$Y_t = E_1 \lambda_1^t + E_2 \lambda_2^t + \rho_1 \left[ - \frac{a_{21} a_{12} / (\nu - a_{22}) + a_{11} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^t - \frac{a_{21} a_{12} / (\nu - a_{22}) + a_{11} - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_2^t + \nu^t \right]$$

$$Y_{Ft} = E_1' \lambda_1^t + E_2' \lambda_2^t + \rho_2 \left[ - \frac{a_{21} a_{12} / (\nu - a_{22}) + a_{11} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{\nu - a_{22}}{\lambda_1 - a_{22}} \lambda_1^t - \frac{a_{21} a_{12} / (\nu - a_{22}) + a_{11} - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{\nu - a_{22}}{\lambda_2 - a_{22}} \lambda_2^t + \nu^t \right]$$

$$E_1 = \frac{Y_0 (a_{11} - \lambda_2) + a_{12} Y_{F0}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$E_2 = \frac{Y_0 (a_{11} - \lambda_1) + a_{12} Y_{F0}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$A_1' A_2'$  が  $A_1 A_2$  に関して求められたと同様に (II-3の注③参照)  $E_1' E_2'$  は  $E_1$

$E_2$  を求めたのに順じられる。

一定の率の均衡成長を考える場合、まず趨勢項を無視して考えると

$$Y_t = E_1 \lambda_1^t + E_2 \lambda_2^t \quad (21')$$

$$Y_{Ft} = E_1' \lambda_1^t + E_2' \lambda_2^t \quad (22')$$

均衡成長をするためには、 $Y_t = Y_{Ft}$  でありしかも両者は一定の率で成長せねばならないから

$$Y_t = Y_{Ft} = Dg^t \quad (23)$$

これは

$$\frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t} = \frac{Dg^{t+1} - Dg^t}{Dg^t} = g - 1 \quad \text{より}$$

$g - 1$  が均衡成長率である。この率で成長しつづけるためには  $\lambda_1 \lambda_2$  が実根で正でなければならぬ。しかも(21')(22')式で  $\lambda_1^t, \lambda_2^t$  のいずれか一根のみにならねばならない。<sup>(1)</sup> さらに二つの方程式の係数は等しくなっていないければならない。ここで一根を  $\lambda_1^t$  としても一般性は失なわれない。

(21')(22')式を考慮して

$$E_1' = E_1 \frac{a_{21}}{\lambda_1 - a_{22}} = E_1 \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$$

$E_1 = E_1'$  より

$$\lambda_1 = a_{11} + a_{12} = a_{21} + a_{22}$$

$$\lambda_2 = a_{11} - a_{21} = a_{22} - a_{12}^{(2)}$$

係数を書きなおして、

$$\lambda_1 = \sigma [1 - (h_1 + h_2)] + 1 - \theta_1$$

$$\lambda_2 = 1 - \theta_1 - \theta_2 + \frac{\beta_3}{1 - (h_1 + h_2)}$$

$\lambda_1 \lambda_2$  の値を  $E_1 E_2$  に代入すると、(21')(22')式より

$$Y_t = \frac{a_{21} Y_0 + a_{12} Y_{F0}}{a_{21} + a_{12}} \lambda_1^t + \frac{a_{12} (Y_0 - Y_{F0})}{a_{21} + a_{12}} \lambda_2^t \quad (24)$$

$$Y_{Ft} = \frac{a_{21} Y_0 + a_{12} Y_{F0}}{a_{21} + a_{12}} \lambda_1^t - \frac{a_{21} (Y_0 - Y_{F0})}{a_{21} + a_{12}} \lambda_2^t \quad (25)$$

$Y_0 = Y_{F0}$  のときに限って  $\lambda_2^t$  を含む項は消去される。すなわち一定の率での均衡成長は初期において設備能力いっぱい使用されること示す。従って(24) (25) 式より  $Y_0 = Y_{F0}$  の時

$$Y_t = Y_{Ft} = Y_0 \lambda_1^t = Y_{F0} \lambda_1^t$$

そして成長率は

$$\frac{Y_0 \lambda_1^{t+1} - Y_0 \lambda_1^t}{Y_0 \lambda_1^t} = \lambda_1 - 1$$

$$\text{成長率 } \lambda_1 - 1 = \sigma [1 - (h_1 + h_2)] - \theta_1$$

ここで  $\sigma$  は (Domar の  $\sigma$ ) 資本 ( $k$ )/産出 ( $y$ ) 比率の逆数を示し  $1 - (h_1 + h_2)$  は長期の貯蓄性向であることから  $\sigma (1 - (h_1 + h_2)) = s/k$

$$k = \frac{K}{Y}, \quad s = \text{貯蓄性向}$$

これは Harrod の保証成長率を示す。(3)

この式より  $\theta_1$  をさし引けば “net” の成長率となる。

Smithies モデルと Harrod モデルの相違は “gross” と “net” の相違である。

注

(1) (21)式で  $Y_t$  の成長率は

$$\frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t} = \frac{E_1 \lambda_1^{t+1} + E_2 \lambda_2^{t+1} - (E_1 \lambda_1^t + E_2 \lambda_2^t)}{E_1 \lambda_1^t + E_2 \lambda_2^t} = \frac{E_1 \lambda_1^t (\lambda_1 - 1) + E_2 \lambda_2^t (\lambda_2 - 1)}{E_1 \lambda_1^t + E_2 \lambda_2^t}$$

$t=0$  を代入すると成長率は  $t=1$  を代入すると成長率は

$$\frac{E_1 (\lambda_1 - 1) + E_2 (\lambda_2 - 1)}{E_1 + E_2} \quad \frac{E_1 \lambda_1 (\lambda_1 - 1) + E_2 \lambda_2 (\lambda_2 - 1)}{E_1 \lambda_1 + E_2 \lambda_2}$$

で期間が異なれば成長率も違うことより一様でなければならぬ。

(2)  $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

根と係数の関係より  $\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$

$\lambda_1 = a_{21} + a_{22}$  を代入して  $\lambda_2 = a_{11} - a_{21}$

(3) Harrod 【5】 3章

II-5  $Y_0 \neq Y_{F0}$  の時

$|\lambda_2| < 1$  であれば均衡成長は可能である。実際支配根は  $\lambda_1^t$  となり、 $\lambda_2^t$  は時間の経過とともにゼロに近づく。

II-6 趨勢項を考慮すると、均衡成長は次のような場合に限り達成される。すなわち趨勢項のない場合の条件

$\lambda_1 = a_{11} + a_{12} = a_{21} + a_{22}$ ,  $Y_0 = Y_{F0}$ ,  $|\lambda_2| < 1$  に加えて  $\nu = \lambda_1$  という場合を考えると、非同時方程式の特殊解を

$$Y_t = \gamma_1 t \lambda_1^t \quad Y_{Ft} = \gamma_2^t \lambda_2^t \quad (\gamma_1 \gamma_2 = \text{const}) \text{ とした時, } Y_t = Y_{Ft} = (Y_0 + \gamma_3 t)$$

$\lambda_1^t$ ,  $(\gamma_3 = \text{const})$  となって均衡成長が達成されることを以下に示す。

(21)(22) 式より

$$Y_t = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t + \gamma_1^t \lambda_1^t$$

$$Y_{Ft} = A_1' \lambda_1^t + A_2' \lambda_2^t + \gamma_2^t \lambda_1^t$$

$t=0$  を代入して

$$Y_0 = A_1 + A_2 \quad \therefore A_2 = Y_0 - A_1$$

$$Y_{F0} = A_1' + A_2' = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} A_1 + \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} A_2 \quad ((19) \text{ 式より})$$

$$= \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} A_1 + \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} (Y_0 - A_1)$$

$$\therefore A_1 = \frac{a_{12} Y_{F0} - (\lambda_2 - a_{11}) Y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{a_{12} Y_{F0} + a_{21} Y_0}{a_{21} + a_{12}}$$

同様にして

$$A_1' = \frac{a_{12} Y_{F0} + a_{21} Y_0}{a_{21} + a_{12}}$$

これをもとの方程式に代入すると

$$Y_t = \frac{a_{12} Y_{F0} + a_{21} Y_0}{a_{21} + a_{12}} \lambda_1^t + \gamma_1^t \lambda_1^t$$

$$Y_{Ft} = \frac{a_{12}Y_{F0} + a_{21}Y_0}{a_{21} + a_{12}} \lambda_1^t + \gamma_2^t \lambda_1^t$$

従って

$$Y_t = Y_0 \lambda_1^t + \gamma_2^t \lambda_1^t = \lambda_1^t (Y_0 + \gamma_2^t)$$

$$Y_{Ft} = \lambda_1^t (Y_0 + \gamma_2^t)$$

$Y_t = Y_{Ft}$  であるためには  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$  (証明終り)

$$\therefore Y_t = Y_{Ft} = \lambda_1^t (Y_0 + \gamma_3^t)$$

$Y_t, Y_{Ft}$  は  $t$  が増加するとともに  $\lambda_1^t$  によって支配される。

$$(\because \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma_3^t}{\lambda_1^t} = 0)$$

II-7 以上は均衡成長のケースを検討したが、次に振動するケースを考える。振動が起る時二つのケースが考えられる。

(a) 振動が景気上昇極面で起るケース、

(21)(22)式の一般解がマイルドな振動を起しても、 $Y_t$  は特解によって支配されるから、 $Y_t$  は成長しつづける。 $Y_{Ft}$  についても同様である。

(b) 振動が景気の下降極面で起るケース。

(a)のケースにおいて、Smithies 体系では State 1 にあり、循環的成長が起る。

(b)のケースでは、Smithies 体系は State 1 にとどまらない。(b)のケースは  $\bar{Y} > Y_t$  あるいは  $\bar{Y} > Y_{t-1}$  となっていることが予想されるから体系は

State2 に移っている。

State2 で得られる体系の一般解は Smithies に従って表わすと、

$$Y_t = T_1 \lambda_1^t + T_2 \lambda_2^t + Q_1 \bar{Y} \quad (26)$$

$$Y_{Ft} = T_1' \lambda_1^t + T_2' \lambda_2^t + Q_2 \bar{Y} \quad (27)$$

ここで単純化のため趨勢項を無視して (9)(10) 式の特解を求めておく。以下 Smithies は  $\bar{Y}$  を定数として取扱う。 $Q_1, Q_2$  は

特解を  $\bar{Y}_t = U, \bar{Y}_F = U'$  において

$$U = a'_{11}U + a'_{12}U' + \omega \bar{Y}$$

$$U' = a'_{21}U + a'_{22}U' + \varepsilon \bar{Y}$$

$$(1 - a'_{11})U - a'_{12}U' = \omega \bar{Y}$$

$$-a'_{21}U + (1 - a'_{22})U' = \varepsilon \bar{Y}$$

$$U = \frac{\omega \bar{Y} (1 - a'_{22}) + a'_{12} \varepsilon \bar{Y}}{(1 - a'_{11})(1 - a'_{22}) - a'_{21} a'_{12}}$$

$$U' = \frac{\omega \bar{Y} a'_{21} + \varepsilon \bar{Y} (1 - a'_{11})}{(1 - a'_{11})(1 - a'_{22}) - a'_{21} a'_{12}}$$

より

$$Q_1 = \frac{\omega (1 - a'_{22}) + a'_{12} \varepsilon}{(1 - a'_{11})(1 - a'_{22}) - a'_{21} a'_{12}} \quad (28)$$

$$Q_2 = \frac{\omega a'_{21} + \varepsilon (1 - a'_{11})}{(1 - a'_{11})(1 - a'_{22}) - a'_{21} a'_{12}} \quad (29)$$

$\lambda_1' \lambda_2'$  は特性方程式

$$\begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda' & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} - \lambda' \end{vmatrix} = 0$$

の根である。

Smithies 体系が State1 に移って再び State2 に移るとその体系はそのままとどまるか、あるいは State1 に移って再び State2 に移る等。結論として彼の理論は、循環と成長の長期の経済変動モデルであることが示される。

### III

以上のように経済の変動と成長のモデルでの、投資関数に多くの独立変数を取り入れて複雑化しても、ある条件のもとでは経済は均衡成長しつづけ、とりわけ Harrod の保証成長率に等しい率で成長しつづけることが証明された。この意味で Smithies モデルは景気上昇極面においては、適応可能であると言える。しかし各企業はこのような長期経済趨勢が上向きであることを一応正常なものとみなすとしても、この正常性が絶対的であるとは考えない。このような立場からすると拡張経路からの下方背離そのも

のも起りえないことになる。<sup>(1)</sup>

他方, “ratchet” が働く State2 のケースでは, モデルの前提として, これまでに実現した最高の産出高  $\bar{Y}$  は変数として導入しておきながら, (9) (10)式の一般解を求める場合は, 定数として扱い, それぞれの一般解を求めている。従って景気の下向極面において, Smithies モデルは適切であるとは言えない。

結論的には, 投資関数, 消費関数に “ratchet effect” を導入したにもかかわらず, “ratchet” が働かないモデルには適応されても, “ratchet” が働く場合のモデルは適切でなかったと言える。

#### 注

(1) 安部・小林〔9〕4章

#### 参 考 文 献

- 〔1〕 Domar, E.D., Essays in the Theory of Economic Growth, 1957  
(宇野健吾訳『経済成長の理論』)
- 〔2〕 Duesenberry, J.S., Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior, 1949
- 〔3〕 Eichner, A.S., “A Theory of the Determination of Mark-up under Oligopoly” Economic Journal, Dec, 1973.
- 〔4〕 Gandolfo, G., Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics, 1970
- 〔5〕 Harrod, R.F., Towards a Dynamic Economics, 1948  
(高橋・鈴木訳『動態経済学』)
- 〔6〕 Kalecki, M., Theory of Economic Dynamics, 1954  
(宮崎・伊東訳『経済変動の理論』)
- 〔7〕 Modigliani, F., “Fluctuations in the Saving-Income Ratio : A Problem in Economic Forecasting”, Studies in Income and Wealth, 1949.
- 〔8〕 Smithies, A., “Economic Fluctuations and Growth,” Econometrica, Jan, 1957.
- 〔9〕 安倍一成・小林好宏『現代寡占経済論』昭和42年
- 〔10〕 新開陽一, 『経済分析と微分・定差方程式』昭和45年