〔論　文〕

# 新聞売り子問題の期待利潤の性質

青　木　博　明

キーワード
新聞売り子問題　確率分布　期待利潤　標準偏差　仕入量

## Ⅰ　はじめに

新聞売り子問題とは需要量が確率的な場合の最適在庫問題であり，新聞や生鮮品のように，販売期間を過ぎると価値がなくなる，または減少する商品に適用される。新聞売り子問題には，解に関する定理があり，商品の売値と仕入値に対して，需要の確率分布が分かれば最適な仕入量，つまり期待利潤を最大化する仕入量が得られる。

本稿では，需要の確率分布がLS（Local and Scale）Conditionの条件を満たすか，あるいは正規分布のときに，最大期待利潤が売値と仕入値と，需要の期待値と標準偏差の関数として記述できることを示す。LS Conditionとは，正規分布よりゆるい条件で，元の確率変数から期待値を引き標準偏差で割ることで標準化した変数の確率分布が，元の確率変数の期待値と標準偏差の値に関係なく同じであることである。一群の確率分布について仮定される。正規分布，一様分布，指数分布などもLS Conditionを満たす。これらの確率に関する仮定の下では，価格を所与とすれば，最大期待利潤が，需要の期待値の増加かつ一次関数，標準偏差の減少かつ一次関数であることを示す。特に後者は意味があると考える。Meyer（1987）は，LS Conditionの条件の下で，期待効用が標準偏差の減少関数であることを示しているが，本稿では同じ条件の下で，新聞売り子問題の最大期待利潤が標準偏差の減少かつ一次関数であることを示すことになる。これらの結論は，ここで論じる利潤が多くの企業において重要であり，また後で詳しく述べるように経営上の戦略につながることを考えれば，大変意味のある結論であるといえる。

また上の分析に関連してCentralizationの効果を論じる。まずDecentralizationとは需要が発生する複数の地域があり，各地域ごとに供給拠点（店舗）が存在しているシステムを指す。それに対してCentralizationとは需要が発生する複数の地域を一つの供給拠点で統合するシステムを指す。Lin *et al*（2001）はCentralizationの効果を論じており，Decentralization に対してCentralizationの方が期待利潤を増加させることを示している。

この新聞売り子問題のCentralizationの効果については一連の研究がある。Eppen（1979）は1財モデルで，在庫費用関数とペナルティ関数が線型のとき，需要の確率分布が正規分布という仮定の下で，Decentralization に比較してCentralizationが期待費用を減少することを示し，Chen and Lin（1989）は，Eppen（1979）の結果を一般化し任意の確率分布と在庫費用関数とペナルティ関数がConcaveという仮定の下でCentralizationについてEppen（1979）と同じ結論を得た。Chang and Lin（1991）はCentralizationを地域間の輸送費用を含むモデルに拡張した。Lin *et al*（2001）は，正規分布の仮定の下で，期待費用ではなく期待利潤について論じ，Decentralizationに比較してCentralizationが期待利潤を

増加することを示した。本稿ではLin *et al*（2001）の結果を，先に得た需要の期待値と標準偏差の関数として記述される期待利潤の式から簡潔に導く。なお，Lin *et al*（2001）は期待利潤が需要の期待値と標準偏差の関数として記述できることに言及していない。

価格として売値と仕入値以外に，サルベージ価格とペナルティ価格を導入している。Lin *et al*（2001）その他の上で述べた論文でもこれらの価格を導入している。サルベージ価格とは，売れ残った分の価格であり，仕入れ元が売れ残り分を仕入価格よりも安い価格で買い戻す。例えば古紙の回収業者や食料品の飼料業者などが想定できる。ペナルティ価格とは品切れによって生じる，販売先への賠償金（もしあるとすれば）や信用へのダメージ，顧客のその後の需要行動へのマイナスの影響などを費用として数値化したものといえる。

以下，本稿の構成は次のようになっている。Ⅱ章新聞売り子問題のモデルと期待利潤最大化条件，Ⅲ章最大期待利潤の性質，Ⅳ章Centralizationの効果，Ⅴ章サルベージ価格とペナルティ価格の導入，Ⅵ章おわりに，である。議論を分かりやすくするために，まず最初にサルベージ価格とペナルティ価格を除いて論じ，その後にこの二つの価格を導入している。

## Ⅱ　新聞売り子問題のモデルと期待利潤最大化条件

ある商品のある販売期間における利潤を考える。その商品は販売期間を過ぎると価値がなくなるものとする。その商品の販売期間における期首の仕入量を$a$，需要量を$x$，売上量を$y$，売値を$p$，仕入値を$c$，利潤を$R$とおく。当然ながら$0 < c < p$とする。利潤は詳しくは粗利益であり$R = py - ca$で示されるものとする。需要量$x$は連続的な確率変数とし，次に示すようにその確率密度関数を$f(x)$とし，期待値$\mu$と分散$\sigma^2$を持つものとする。特に断らない限り$\mu$と$\sigma^2$は正とする。

$$x \sim f(x), \quad E(x) = \mu, \quad V(x) = \sigma^2 \tag{1}$$

売上量は仕入量と需要量の関係から次の2つの場合に分かれる。つまり需要量$x$が仕入量$a$未満のときは，売上量$y$＝需要量$x$となり，需要量が仕入量以上のときは，売上量$y$＝在庫量$a$となる。よって利潤は次の（2）によって記述される。$R(x,a)$は利潤$R$が$x$と$a$の関数であることを示す。

$$R = R(x,a) = py - ca \quad (if\ \ x < a\ then\ y = x, \quad if\ \ a \le x\ then\ y = a\ ) \tag{2}$$

$R(x,a)$に対して，期待利潤$ER(a)$が次のように計算される。上の式にしたがい$0 \le x < a$と$a \le x$の範囲に分けて積分し期待利潤を求める。

$$ER = ER(a) = \int_0^\infty R(x,a)dx = p(\int_0^a xf(x)dx + a\int_a^\infty f(x)dx) - ca \tag{3}$$

この期待利潤$ER$=$ER(a)$を$a$によって最大化することを考える。次のように$ER(a)$を$a$で微分し0とおくことで，次の最大化条件が得られる。

$$dER/da = p\int_a^\infty f(x)dx - c = 0 \tag{4}$$

また次に示すように2階の条件を満たしていることが分かる。

$$d^2ER/da^2 = -pf(a) \leq 0 \tag{5}$$

（4）より次の最大化条件が得られる。Pr( ) は確率を示すものとする。

$$\text{最大化条件}\quad c/p = \int_{a^*}^{\infty} f(x)dx = \Pr(a^* \leq x) \quad \cdots \quad \text{売切れ確率}\,(a^*) \tag{6}$$

最大化条件を満たす $a$ を $a^*$ とおく。（6）の右辺は $a^*$ に対する売切れ確率と呼ぶことができるもので，これが左辺の $c/p$ に一致すれば，最大化条件を満たすことになる。$a^*$ は正である。

$a^*$ によって実現される最大期待利潤を $ER^*$ とおく。（6）を満たす $a^*$ を（3）の $ER$ に代入することで，次の $ER^*$ が得られる。$ER^*$ は非負となる。

$$ER^* = ER(a^*) = p\int_0^{a^*} xf(x)dx \geq 0 \tag{7}$$

## Ⅲ　最大期待利潤の性質

最適解に対する最大期待利潤と，需要の期待値と標準偏差の関係をみる。まず一般的な確率分布の下で分析を行い，その後需要の確率分布に LS Condition または正規分布を仮定する。$x$ から $\mu$ を引き，それを $\sigma$ で割ることで標準化した変数を $z$ とし，$z$ の確率密度関数を $g(z;\ \mu, \sigma)$ とする。これは一般的には $\mu$ と $\sigma$ に依存する。$z$ の期待値は 0 分散は 1 となる。

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}, \qquad z \sim g(z;\mu,\sigma), \quad E(z)=0, \quad V(z)=1 \tag{8}$$

$x$ から $z$ への変数変換に伴い $g(z;\ \mu, \sigma)$ に関して次が成立する。

$$g(z;\mu,\sigma) = f(x)(dx/dz) = f(\mu+\sigma z)\sigma \tag{9}$$

同様に $x$ のある値 $a$ を標準化した値を $q$，最適解 $a^*$ を標準化した値を $q^*$ とする。

$$q = \frac{a-\mu}{\sigma} \quad or \quad a = \mu + \sigma q, \qquad q^* = \frac{a^*-\mu}{\sigma^*} \quad or \quad a^* = \mu + \sigma q^* \tag{10}$$

$x<0$ の確率を 0 または十分小さく 0 とみなすことができるものとする。また $a=0$ に対応する $q$ の値を $q^0$ とおく。$q^0 \equiv (0-\mu)/\sigma = -\mu/\sigma$ である。よって $1=\Pr(0 \leqq x) = \Pr(q^0 \leqq z)$ となる。

$a^* \leqq x$ と $q^* \leqq z$ は同値なので $\Pr(a^* \leqq x) = \Pr(q^* \leqq z)$ となり，$ER$ の最適化条件（4）は次のように $z$ でも表される。

$$c/p = \int_{a^*}^{\infty} f(x)dx = \int_{q^*}^{\infty} g(z;\mu,\sigma)dz, \ (=\Pr(a^* \leqq x)=\Pr(q^* \leqq z)), \qquad a^* = \mu + \sigma q^* \tag{11}$$

（11）を満たす $q^*$ から得られる $a^* = \mu + \sigma q^*$ が最適解となる。これらの式と（7），また $x$ を $z$ に変数変換することにより，期待利益 $ER^*$ について次の式の展開が成立する。

$$
\begin{aligned}
ER^* &= p\int_0^{a^*} xf(x)dx \\
&= p\int_{q^0}^{q^*}(\mu+\sigma z)f(\mu+\sigma z)\sigma dz \\
&= p\int_{q^0}^{q^*}(\mu+\sigma z)g(z;\mu,\sigma)dz \\
&= p\mu\int_{q^0}^{q^*}g(z;\mu,\sigma)dz + p\sigma\left(\int_{q^0}^{\infty}zg(z;\mu,\sigma)dz - \int_{q^*}^{\infty}zg(z;\mu,\sigma)dz\right) \\
&= p\mu\left(1-\int_{q^*}^{\infty}g(z;\mu,\sigma)dz\right) - p\sigma\int_{q^*}^{\infty}zg(z;\mu,\sigma)dz \\
&= (p-c)\mu - p\sigma\int_{q^*}^{\infty}zg(z;\mu,\sigma)dz
\end{aligned} \tag{12}
$$

つまり次の式が成立する。

$$ER^* = (p-c)\mu - p\sigma\int_{q^*}^{\infty}zg(z;\mu,\sigma)dz \tag{13}$$

この式の右辺の定積分の値は常に正である[1]。よって$\sigma$が0に近づけば$ER^*$は下から$(p-c)\mu$に近づく。ただし一般的には$g(z;\mu,\sigma)$は$\sigma$にも依存し，また$\sigma$にしたがって$q^*$が変化するので，この定積分の値は$\sigma$に依存する。$\sigma=0$は，需要量が確率的ではなくある確定値$\mu$を持つことを意味し，そのときの粗利益は$(p-c)\mu$となるが，これは上の値に一致する。その意味でも（13）は整合性を持つ。

次に$x$の確率分布がLS Conditionを満たすと仮定する。LS Conditionとは，$x$から$z=(x-\mu)/\sigma$への標準化に伴って$f(x)$から得られる確率密度関数$g(z;\mu,\sigma)$が$\mu$と$\sigma$の値に関係なく同一であることである。一群の複数の確率分布の間で仮定される。正規分布，一様分布，指数分布などがLS Conditionを満たす[2]。LS Conditionを満たす確率分布の間では，$z$の分布$g(z;\mu,\sigma)$が$\mu$と$\sigma$に依存せず，したがって$g(z)$と記述できる。需要$x$の確率分布がこのLS Conditionを満たすと仮定する。よってこの（13）は次の（14）のように書き換えられる。（14）では$q^*$の値が$\mu$，$\sigma$に依存せず，（11）から$c/p$のみから決まる。よって$q^*=q^*(c/p)$と記述できる。

$$ER^* = (p-c)\mu - p\sigma\int_{q^*}^{\infty}zg(z)dz \quad \text{where} \quad q^*=q^*(c/p) \tag{14}$$

次に$x$が正規分布にしたがうとする。これはLS Conditionより強い仮定である。$g(z)$は標準正規分布$\phi(z)$となり，やはり$q^*$の値は$\mu$，$\sigma$に依存せず$c/p$のみから決まり$q^*=q^*(c/p)$と記述できる。また正規分布の性質として次が成立する。

$$\phi(q^*) = \int_{q^*}^{\infty}z\phi(z)dz \quad \text{where} \quad q^*=q^*(c/p) \tag{15}$$

よって$x$が正規分布にしたがうとき$ER^*$は次で示される。

$$ER^* = (p-c)\mu - p\sigma\phi(q^*) = (p-c)\mu - p\sigma\phi(q^*(c/p)) \tag{16}$$

上の結果を次の命題にまとめる。

命題 1

一般に最大期待利潤 $ER^*$ は次で示される。

$$ER^* = (p-c)\mu - p\sigma\int_{q^*}^{\infty} zg(z;\mu,\sigma)dz \tag{17}$$

$x$ の確率分布が LS Condition を満たすとき $ER^*$ は次で示される。

$$ER^* = (p-c)\mu - p\sigma\int_{q^*}^{\infty} zg(z)dz \qquad \text{where} \quad q^*=q^*(c/p) \tag{18}$$

$x$ が正規分布にしたがうとき $ER^*$ は次で示される。

$$ER^* = (p-c)\mu - p\sigma\phi(q^*) = (p-c)\mu - p\sigma\phi(q^*(c/p)) \tag{19}$$

上の命題では，最大期待利益 $ER^*$ が $p$,c と $\mu$，$\sigma$ によってどのように決まるかが示されている。確率分布が LS Condition を満たす場合（正規分布を含む）には $g(z)$ が $\mu$ と $\sigma$ の値に依存せず，よって最大化条件から得られる $q^*$ も $\mu$ と $\sigma$ の値に依存しない。したがって $ER^*$ は $p$,c を所与とすれば $\mu$ と $\sigma$ の一次式で示される。特に需要の標準偏差 $\sigma$ の増加が最大期待利潤 $ER^*$ に負の影響を与えることを明確な形で示しており，興味深い [3)]。

したがって LS Condition を満たす場合，微係数は以下のようになる。2 階の微分はどれも 0 である。

$$dER^*/d\mu = p-c > 0, \qquad dER^*/d\sigma = -p\int_{q^*}^{\infty} zg(z)dz < 0 \tag{20}$$

さらに確率分布が正規分布のとき次を得る。

$$dER^*/d\mu = p-c > 0, \qquad dER^*/d\sigma = -p\,\phi(q^*) < 0 \tag{21}$$

したがって，需要の期待値 $\mu$ が 1 増えれば一定の比率 $p-c$ で最大期待利潤 $ER^*$ が増え，標準偏差 $\sigma$ が増えれば一定の比率で $ER^*$ が下がることが示される [4)]。

正規分布を仮定すると，c/$p$ が 0 か 1 に近づけば $\phi(q^*)$ の値は小さくなる。このことは (19) から分かるように $\sigma$ が 0 に近づくのと同様に $ER^*$ を $(p-c)\mu$ に近づける効果を持つ。また (21) から分かるように $\sigma$ が $ER^*$ に与える負の効果は小さくなる。

正規分布の場合は $\phi(q^*) \leqq \phi(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ より，次のように (21) のより具体的な上限と下限が示される。

$$ER^* \geq (p-c)\mu - p\sigma/\sqrt{2\pi}, \qquad dER^*/d\sigma \geq -p/\sqrt{2\pi} \tag{22}$$

＜計算例＞

このように $\sigma$ が小さくなると $ER^*$ が大きくなるが，実際に $\sigma$ を小さくする方法として予約制がある。例えばケーキなどの商品販売の予約である。飲食店の予約も含んで良いであろう。予約制を導入するとキャンセルなどで少し需要が変動するが，$\sigma$ は小さくなると考えられる。$\sigma$ が小さくなれば，それにと

もなって (18) (19) の右辺の第 2 項が小さくなり，その分 $ER^*$ が大きくなる。ただし予約制によって $\mu$ の値は小さくなり $ER^*$ も小さくなると考えられる。しかし予約制の導入によって，$\sigma$ が小さくなり $\mu$ の減少によるマイナスの効果を上回るプラスの効果があれば，$ER^*$ は大きくなることになる。

正規分布を仮定して (19) を使い簡単な計算例を示す。$p$=100, $c$=40 とする。$\mu$ =20, $\sigma$ = 10 のとき $ER^*$=813.66 である。ここで予約制を導入して $\sigma$ =1 となったとする。もし予約制を導入しても $\mu$ が不変ならば，つまり $\mu$ =20, $\sigma$ = 1 のとき $ER^*$=1161.37 である。では，予約制によって $\mu$ が減少してもどこまでならば $ER^*$ の値が維持されるかを計算してみると，$\mu$ =14.205, $\sigma$ = 1 のとき同じ $ER^*$=813.66 が得られる。よって，予約制による期待値 $\mu$ の減少分が 5.795 までならば，予約制を選んだ方が $ER^*$ が高いことになる。

また (19) から $p$ と $c$ を同じとすれば，$ER^*$ を一定とする $\mu$ と $\sigma$ の関係は傾きが正の一次関数となることが分かる。例えば，$p$=100, $c$=40, $ER^*$=1000 を一定とすると $\mu$ と $\sigma$ の関係を示す具体的な数値は次のようになる。$\sigma$ を縦軸に $\mu$ を横軸にとる。

$$\sigma = -ER^* / p\phi(q^*) + ((1-c/p)/\phi(q^*))\mu \ = \ -25.88 + 1.55\mu, \quad ER^*=1000, \quad 0 \leqq \sigma, \mu \tag{23}$$

この一次関数が示すグラフの右下ではグラフよりも $ER^*$ はより大きい，左上では $ER^*$ はより小さい値をとる。

## Ⅳ　Centralizationの効果

上で述べたように，Decentralization とは需要が発生する複数の地域があり，各地域ごとに供給拠点（店舗）があるシステムを指し，他方 Centralization とは需要が発生する複数の地域に対する供給拠点を一つに統合するシステムを指す。Centralization の方が最大期待利潤の合計が大きくなることを示す。すでに Lin *et al* (2001) は Decentralization に対して Centralization の方が期待利潤を増加させることを示している。その他，最初に取り上げたようにいくつかの文献においても違う条件で Centralization が Decentralization よりも有利という結論が得られている。ここでは Lin *et al* (2001) が得た Centralization の効果に関する結論を，これまでの議論を利用して簡潔に導いている。

地域の数を $n$ とする。地域 $i$ の需要を $x_i$, その期待値と標準偏差を $\mu_i$, $\sigma_i$, 全ての $x_i$ を統合したものを $x_0$, その期待値と標準偏差を $\mu_0$ と $\sigma_0$, $x_i$ と $x_j$ の相関係数を $\rho_{ij}$ $(0 \leqq \rho_{ij} \leqq 1)$ とすると。各地域の需要は正規分布にしたがうとする。$p$ と c は各地域とそれを統合した場合で同じとする。以下が成立する。

$$x_0 = \sum_i^n x_i, \qquad \mu_0 = \sum_i^n \mu_i, \qquad i = 1, \cdots, n \tag{24}$$

$$\sigma_0^2 = E(x_0 - \mu_0)^2 = E((x_1 + \cdots + x_n - (\mu_1 + \cdots + \mu_n))^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2 + \sum_i^n \sum_{i \neq j}^n \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \tag{25}$$

$$= (\sum_i^n \sigma_i)^2 + \sum_i^n \sum_{i \neq j}^n \sigma_i \sigma_j (\rho_{ij} - 1) \leq (\sum_i^n \sigma_i)^2$$

地域 $i$ の最大期待利潤を $ER_i^*$, それらを合計したものを $ER_T^*$, 統合した地域つまり Centralization での最大期待利潤を $ER_0^*$ とする。これらの式と (19) から最大期待利潤について以下の式が成立する。各地域と統合した場合で $p$ と $c$ は同じなので $q^*$ も同じである。

$$ER_i^* = (p-c)\mu_i - p\sigma_i\phi(q^*) \quad i=1,\cdots,n, \qquad ER_T^* = \sum ER_i^* = (p-c)\sum\mu_i - p\phi(q^*)\sum\sigma_i \tag{26}$$

$$ER_0^* = (p-c)\mu_0 - p\sigma_0\phi(q^*) \tag{27}$$

$$ER_0^* - ER_T^* = p(\sum\sigma_i - \sigma_0)\phi(q^*) \geq 0 \tag{28}$$

正規分布の条件をゆるめて，需要の確率分布がLS Conditionを満たす場合にも，$\phi(q^*)$ は$\int_{q^*}^{\infty} zg(z)dz > 0$に置き換えられた後，同様の結論が得られる。

(25) と (28) から分かるように，Centralizationつまり複数の地域を統合した最大期待利潤$ER_0{}^*$の方が，Decentralizationつまり個別の地域での最大期待利潤を合計した$ER_T{}^*$よりも大きくなる。(25) で示されるように，その差は地域間の標準偏差と相関係数の関係から決まり，各$\sigma_i$を所与としたときは，各$\rho_{ij}$の増加関数となる。全ての$i$と$j$について$\rho_{ij}=1$のときのみ (28) の等式が成り立つ。また全ての$i$と$j$について需要が独立で$\rho_{ij}=0$のときはその差は次になる。

$$ER_0^* - ER_T^* = p\left(\sum\sigma_i - \sqrt{\sum\sigma_i^2}\right)\phi(q^*) > 0 \tag{29}$$

なお，Centralizationの対象を地域に限る必要はなく，時間的に，例えば月曜日と火曜日と解釈することもできる。消費期限が 1 日間だけだったものが，技術進歩で 2 日間に伸び，その結果，月曜と火曜日の統合が可能になるようなケースである。その場合も，統合した方が期待利潤は大きくなることになる。

## V　サルベージ価格とペナルティ価格の導入

ここでは，売値と仕入値に，売れ残った分の価格であるサルベージ価格$s$と品切れに対する費用価格であるペナルティ価格$v$を追加して，上と同様の結論が得られることを示す。$0 \leq s < c$，$0 \leq v$とする。各地域で$p,c$が同じとする。期待利潤$ER$が次で示される。

$$ER = \int_0^a (px + s(a-x))f(x)dx + \int_a^{\infty} (pa - v(x-a))f(x)dx \quad - ca \tag{30}$$

これを$a$で微分して次が得られる。

$$dER/da = (p-s+v)\int_a^{\infty} f(x)dx - c + s = 0 \tag{31}$$

また次に示すように 2 階の条件を満たしていることが分かる。

$$d^2ER/da^2 = -(p-s+v)f(a) \leq 0 \tag{32}$$

(31) より次の最大化条件が得られる。$t=(c-s)/(p-s+v)$ とおく。$0<t<1$ となる。$z$についても (11) と同様に次式が成り立つ。

$$t=\frac{c-s}{p-s+v}=\int_{a^*}^{\infty}f(x)dx=\int_{q^*}^{\infty}g(z;\mu,\sigma)dz,\quad a^*=\mu+\sigma q^* \tag{33}$$

次に最大期待利潤についてみる。(33) の最大化条件を満たす $a^*$ を (30) の $ER$ に代入することで，$a^*$ によって実現される最大期待利潤が得られる。(12) と同様に $x$ から $z$ への変数変換を行っている。

$$\begin{aligned}ER^* &= (p-s)\int_0^{a^*}xf(x)dx-v\int_{a^*}^{\infty}xf(x)dx+(p-s+v)a^*\int_{a^*}^{\infty}f(x)dx-ca^*+sa^* \\ &=(p-s)\int_0^{a^*}xf(x)dx-v\int_{a^*}^{\infty}xf(x)dx \\ &=(p-s)\mu-(p-s+v)\int_{a^*}^{\infty}xf(x)dx \\ &=(p-s)\mu-(p-s+v)(\mu\int_{q^*}^{\infty}g(z;\mu,\sigma)dz+\sigma\int_{q^*}^{\infty}zg(z;\mu,\sigma)dz) \\ &=(p-c)\mu-(p-s+v)\sigma\int_{q^*}^{\infty}zg(z;\mu,\sigma)dz\end{aligned} \tag{34}$$

先と同様，ここでもし $x$ が LS Condition を満たすかあるいは正規分布に従えば，(33) の $g(z;\mu,\sigma)$ と $q^*$ は $\mu$ と $\sigma$ の値に依存せず，定積分の値も依存しない。よって $q^*$ は $t$ の値によってのみ決まる。そのことを $q^*=q^*(t)$ と記述する。よって $ER^*$ は価格を所与とすれば $\mu$ の増加かつ一次関数で，$\sigma$ の減少かつ一次関数となる。以下では正規分布を仮定する。よって (34) の最後の定積分の値は $\phi(q^*)$ となる。

$$ER^*=(p-c)\mu-(p-s+v)\sigma\phi(q^*) \tag{35}$$

次に Decentralization つまり各地域の $ER_i^*$ とその合計 $ER_T^*$，そして Centralization つまり統合した地域の $ER_0^*$ を示す。各地域で $p,c$ が同じなので $q^*$ も同じになる。

$$ER_i^*=(p-c)\mu_i-(p-s+v)\sigma_i\phi(q^*)\qquad i=1,\cdots,n \tag{36}$$

$$ER_T^*=(p-c)\sum\mu_i-(p-s+v)\phi(q^*)\sum\sigma_i,\qquad ER_0^*=(p-c)\mu_0-(p-s+v)\sigma_0\phi(q^*)$$

Centralization と Decentralization を比較するために，その差を求める。

$$ER_0^*-ER_T^*=(p-s+v)(\sum\sigma_i-\sigma_0)\phi(q^*)\geq 0 \tag{37}$$

正規分布の代わりに LS Condition を条件としても，$\phi(q^*)$ が $\int_{q^*}^{\infty}zg(z)dz>0$ に置き換えられて同様の結果が得られる。

したがってサルベージ価格とペナルティ価格を導入しても，先と同様 Centralization の方が Decentralization よりも最大期待利潤が大きいことが分かる。その差はやはり，(25) で示されるように各地域の標準偏差と相関係数の関係性で決まり，全ての $i$ と $j$ について $\rho_{ij}=1$ のときのみ (37) の等式が成り立つ。また全ての $i$ と $j$ について需要が独立で $\rho_{ij}=0$ のときは，その差は次になる。

$$ER_0^* - ER_T^* = (p - s + v)\left(\sum \sigma_i - \sqrt{\sum \sigma_i^2}\right)\phi(q^*) > 0 \tag{38}$$

## Ⅵ　おわりに

最大期待利潤が価格と期待値と標準偏差によってどのように決定されるかを論じ，需要の確率分布がLS Conditionまたは正規分布の下では，最大期待利潤が価格と，期待値と標準偏差の一次関数となることを示した。そしてこのことを利用できる一例を述べたが，他にも利用できる状況があるのではないかと考える。またサルベージ価格とペナルティ価格を導入しても同様の結果が得られることを示した。

またこの結論を利用して，すでにLin *et al*（2001）で得られていることではあるが，各地域ごとに供給拠点（店舗）があるDecentralizationよりも，複数の地域を統合した供給拠点のあるCentralizationの方が最大期待利潤の合計が大きくなることを簡潔に示した。

以上，理論的な最適解について論じてきたが，実践的には最適解の推定方法が重要である。本文中の（11）または（33）が示すように，理論期待値と理論標準偏差の推定値として標本平均と標本標準偏差を用いることで，最適解の推定値を求めることができる。また回帰分析によって需要を予測することも有効な手段だといえる。今後は，最適解の推定方法についても研究していきたい。

以上

### 注

1）右辺の定積分の値が正であることを示す。$L(q) \equiv \int_{q^0}^{q} zg(z;\mu,\sigma)dz$ とおく。$q=q^0=-\mu/\sigma$のとき$L(q)=0$また$q=\infty$のとき$L(q)$は$z$の期待値となり0である。また$L'(q)=qg(q;\mu,\sigma)$より$q^0 \leqq q \leqq 0$のとき$L'(q) \leqq 0$また$0<q<\infty$のとき$L'(q) \geqq 0$である。また（11）より$q<q^*$の領域において，$g(q)>0$となり，よって$L'(q)<0$または$L'(q)>0$となる$q$の範囲がある。よって$L(q^*)<0$である。ゆえに$L(q^*) + \int_{q^*}^{\infty} zg(z;\mu,\sigma)dz = 0$より$\int_{q^*}^{\infty} zg(z;\mu,\sigma)dz > 0$　が成り立つ。

2）指数分布を標準化した変数$z$の確率密度としての関数$g(z;\mu,\sigma)$は，変数の範囲が負の領域を含むため，その意味で厳密には指数分布とはいえない。しかしここでは$g(z;\mu,\sigma)$は（12）などの計算に使われるだけなので，厳密に指数分布であるか否かは問題とはならない。

なお，LS Conditionは，あくまでも複数の確率分布の間での条件であり，個別の確率分布の形状そのものについては制限がない。

3）このことを，展開された数式を組み合わせることで読み取れる，Centralizationを論じた文献Lin *et al*（2001）があるが，最大期待利潤$ER^*$と需要の標準偏差$\sigma$の関係，さらに$ER^*$が$\sigma$の減少関数であることには言及されていない。よってそれに続く本稿の考察も行われていない。

4）$dER^*/d\sigma$が負で一定の値であることは，$\sigma$が十分大きくなれば，$ER^*$が負になることを意味し，一見（7）と矛盾するようにも思えるが，これは$\sigma$が大きくなり過ぎると，確率分布の負の領域が無視できないほど大きくなるためと説明できる。

### 参考文献


Chang, P.L. and Lin, C.T. (1991), "On the effect of centralization on expected costs in a multi-location newsboy problem," *Journal of the Operational Research Society*, 42, 1025-1030.

Chen, M.S. and Lin, C.T (1989), "Effects of centralization on expected costs in a multi-location newsboy problem," *Journal of the Operational Research Society*, 40, 597-602.

Cherikh, M. (2000), "On the effect of centralization on expected profits in a multi-location Newsboy problem," *Journal of the Operational Research Society*, 51, 755-761.

Eppen, G.D. (1979), "Effects of centralization on expected costs in a multi-location newsboy problem," *Management*

*Science*, 25, 498–501.
Hadley, G and Whitin,T. M. (1963), *Analysis of Inventory Systems*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963.
Lin, C.T., Chen, C.B. and Hsieh, H.J. (2001), "Effects of centralization on expected profits in a multi–location newsboy problem," *Journal of the Operational Research Society*, 52, 839–841.
Meyer, J. (1987), "Two–moment decision models and expected utility maximization," *American Economic Revie*w, 77, 421–430.
宮川公男 (1979)『オペレーションズ・リサーチ』春秋社。

(2016年11月18日掲載決定)